前　言

先从一个小概率事件谈起。2003 年 11 月，我从巴黎乘高速火车去伦敦，在我们车厢里，共有 3 名乘客：我和夫人及一位法国的年轻人。我偶然发现那位年轻人好像是在读一本数学书，就想跟他聊聊，没准他也是位数学工作者。我问他是否在看数学书，翻开封面一看，原来是随机过程方面 (随机微分方程) 的一本国际上十分流行的研究生教科书。我十分高兴，以为他也是研究概率论的。后来才知道他并不是学数学的，而只是在银行工作。虽然我早已知道随机过程理论在金融里有重要应用，但遇到此情此景还是十分吃惊。由这个小概率事件的发生可以推断随机过程理论受重视的普遍程度，它在科学和工程诸多领域中的广泛应用更是众所周知的。我猜测他会受这本书的“欺负”，因为他可能缺乏必要的基础，就问他为什么要读这么难的书。他说：“我非常想知道随机积分究竟是怎么回事，为什么会对金融有用。”问完这个问题，自己却有点后悔，因为我也推荐不出一本适合于他的通俗读物。另一方面，我又感到十分惭愧，身为概率论工作者，却未能为公众提供亟须的科普读物。

本书虽然还不是一本科普读物，但我依然希望能以尽可能小的篇幅，介绍随机过程理论的基础知识。为此，就需要精选主题。我们集中于“马尔可夫链”和“随机分析”两部分，无论从理论还是应用角度看，这两部分都应该是最重要的。其次，在题材的处理上，希望做到单刀直入，避免过多地纠缠于技术性的细节。例如在第一部分里，我们紧紧抓住遍历性这一中心课题，从有限状态空间到可数状态空间，从离散时间到连续时间，逐步展开，逐步深入。在论证手法上，采用了一些比较现代的数学工具，使得证明更为简洁。可以看出，第一部分的结构布局和证明方法与现有的教科书有相当大的不同。此外，在本书中，我们也希望触及一些现代的研究课题。例如，人们常说，概率论是研究随机现象中的必然规律的一门学科；然而，现代概率论在非随机的诸多数学分支中也发挥出了越来越大的威力。事实上，与其他学科之间的很强的关联，乃是本学科价值的体现和发展的源泉之一。关于这一点，书中也有所涉及。

本书的形成经历了漫长的岁月。例如“强马氏性”一节来自于 1980 年我在

全国高等师范院校概率论学习班上授课时所找到的处理方式。我曾先后于 1989 年和 1996 年两次给本科生高年级开过随机过程的选修课、1998 年为全国数学暑期学校开过马尔可夫链的短课，为这些课程写过一些讲稿，但直到 1999 年才整理出本书的初稿。此后毛永华和王颖喆在本科生和研究生课中试用过多遍。特别是毛永华已连续使用了多年，作了不少加工，补充了第一章第五节、第二章第四节和第七章等内容，还配备了本书的全部习题。为了不影响全书的脉络主线，许多技术性的证明细节及相关内容尽可能安排在习题中，作为正文的补充。如同登山一样，你可以走盘山路，移步换景，悠悠然到达山顶；也可以选择一条"捷径"直达山顶，博览群山，然后在下山的沿途欣赏你想看的风景。

此外，部分兄弟院校选用此讲义作为本科或研究生的教材，如首都师范大学数学系、安徽师范大学数学与计算机学院等。另有不少同事索取了本讲义的部分章节的电子版作为教学和科研的参考，提出了许多宝贵意见；借此机会向他们表示由衷的感谢。同时也期盼更多的批评意见，以形成具有自己特色、又能较好地服务于读者的入门书。

陈木法

2006 年 12 月 5 日

目　录

第一篇

马尔可夫过程



第一章　离散时间马氏链

§1.1　经济最优化的数学模型与马氏链

我们从一个经济模型开始, 因为现在这个时代, 人们最关心的是经济.

投入产出法

要了解经济情况, 先从调查入手. 首先, 把我们所关心的主要产品和劳务列为 $(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(d)})$, 称为**产综**. 这里,我们固定各产品的单位, 如电: kW, 钢: t 等. 我们需要调查三件事. 首先是初始产综 (如去年的投入), 记为

$$x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \cdots, x_0^{(d)}).$$

其次是一年后的产出情况,

$$x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(d)}).$$

最后是反映生产效率的方阵 $A_1 = (a_{ij}^{(1)})$, 它表示每生产一个单位的第 i 类产品需消耗 $a_{ij}^{(1)}$ 个单位的第 j 类产品. 那么, 为产出 $x_1^{(i)}$ 个单位的第 i 类产品, 需消耗 $x_1^{(i)}a_{ij}^{(1)}$ 个单位的第 j 类产品. 这样, 今年的产出 x_1, 共消耗了 $\sum\limits_{i=1}^{d} x_1^{(i)}a_{ij}^{(1)}$ 个单位的第 j 类产品. 此即是去年投入的第 j 类产品的总和. 于是得出 $x_0^{(j)} = \sum\limits_{i=1}^{d} x_1^{(i)}a_{ij}^{(1)}$. 写成向量形式:

$$x_0 = x_1 A_1.$$

矩阵 A_1 反映出今年的生产效率, 故称之为**效率方阵**, 也称为**结构方阵**或**消耗系数方阵**. 现在, 我们考虑无消费的理想情形 (带消费情形才有实际意义, 但两者在数学上的处理类似, 以后再讨论), 即把产综 x_1 全部投入再生产而经一年后产出 x_2. 在此条件下, 跟上面一样, 我们有 $x_1 = x_2 A_2$. 依此递推, 得出

$$x_0 = x_n A_n \cdots A_1.$$

如假定 $A_n = A_{n-1} = \cdots = A_1 = A$ (在短期内可视为生产率稳定), 则上式成为 $x_0 = x_n A^n$, $n \geqslant 0$. 如 A 可逆, 则导出

$$x_n = x_0 A^{-n}, \qquad n \geqslant 0. \tag{1.1}$$

换句话说, 知道初始产综和效率方阵, 我们便可预报第 n 年的产出 x_n. 这就是著名的**投入产出法**. 可能许多读者都有所耳闻. 早在1968年, 联合国统计司便将它列为国民经济核算的工具. 我国从1974年便开始编制国民经济投入产出表.

正特征向量法

问题是, 经济如何发展好? 当然, 所谓 "好" 有不同的标准. 在我国, 曾长期存在一种看法, 即 "快" 就是 "好". 此刻, 我们不评论此标准的合理性而暂且就事论事, 如何才能快? 由 (1.1) 式可见, 效率在短期内不变, 即 A 不变. 那么, 问题成为如何选初始投入 x_0 才能使 x_n 最大. 如选好投入, 即使某一产品 $x_0^{(j)}$ 不够, 我们还可以进口加以补充. 换言之, 我们希望比值 $x_1^{(j)}/x_0^{(j)}$ 越大越好. 但这句话有问题. 可能对某个 j, 这个比值很大, 但对另一个 j, 这个比值却很小. 我们采用最优化理论中的**极小极大化原理**作为标准: 即在给定效益方阵 A 的前提下, 找出 x_0 使之达到

$$\max_{\substack{x_1>0\\ x_0=x_1A}} \min_{1\leqslant j\leqslant d} \frac{x_1^{(j)}}{x_0^{(j)}},$$

这是个最稳妥的办法. 在日常生活中, 人们常取平均的办法: $\frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{d} x_1^{(j)}/x_0^{(j)}$. 对于数据相差不多的情形, 取平均是一个好办法. 然而, 若数据相差很大, 取平均就会有很大的失真. 例如讲一个球队的运动员的平均年龄就很合适, 但若谈一个托儿所的阿姨和婴儿的平均年龄便会闹笑话. 因而这里不用平均而采用前一标准. 这样做还有一种内在的原因, 即期望各产品按照同一比例增长而避免失调. 读者不难从随后的讨论中领悟出这一点.

现在我们要问: 依照上述标准, 最好的增长速度是多少? 为回答这个问题, 先交待两个概念. 称一个矩阵或向量**非负** (**或正**), 如果它的一切元素非负 (或正). 前面的效益方阵 A_1 即是非负的. 称非负矩阵 $A = (a_{ij})$ **不可约**, 如对于任何的 i 和 j, 存在 $i_1, \cdots, i_m$ 使得

$$a_{ii_1} a_{i_1i_2} \cdots a_{i_{m-1},i_m} a_{i_m,j} > 0.$$

定理 1.1 (华罗庚基本定理 ([33])). 设 A 可逆、非负不可约, 以 u 表示其最大特征根 $\rho = \rho(A)$ 所对应的左特征向量 (必定可取为正的).

(1) 如果取 $x_0 = u$ (不计正常数因子), 则 $x_n = x_0\rho^{-n}$, $n \geqslant 1$. 此时有最快增长速度 ρ^{-1}.

(2) 若再设 A^{-1} 不是非负的, 而且 $0 < x_0 \neq u$, 则必定存在 n_0 和 j_0 使得 $x_{n_0}^{(j_0)} \leqslant 0$. 此时称经济走向崩溃.

"崩溃" 是指发展到某个年份, x_n 必含零或负分量, 即崩溃时间

$$T := \inf\{n \geqslant 1, \text{存在 } j \text{ 使 } x_n^{(j)} \leqslant 0\}$$

有限. 此定理给出了最优的生产方案, 即最好的 (按比例) 投入方案. 如果 T 总是很大, 那么我们就不必在意. 这是因为, 比如说, 我们只订五年计划. 情况究竟如何, 还是让我们先看看华罗庚先生的下述例子.

例 考虑工、农业两种产品. 取 $A = \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix}$. 则

$$u = \left(\frac{5}{7}(\sqrt{2409} + 13),\ 20\right) \approx (44.34397483, 20).$$

下表给出当 x_0 取为 u 的前几位有效数字时, 对应的崩溃时间 T 的值.

x_0	T
(44, 20)	3
(44.344, 20)	8
(44.34397483, 20)	13

由此足以看出经济的敏感性. 上述结论 (2) 甚妙, 它表明: 依据所具备的客观条件, 经济有它自身的合理的发展速度. 太快了不好, 太慢了也不行. 其实点破了也就很容易明白. 我们可以在一夜之间办起无数的工厂, 但没有足够的电力和交通, 这些厂子能运转起来吗? 我们可创办很多很多的大学, 但没有教师, 没有足够财力的支持, 资料室是空的, 实验仪器一样也没有, 能算得上大学吗?

华罗庚基本定理的证明

当然, 华罗庚先生的主要贡献是定理的第二部分. 如何看出这一结论, 这需要相当的功夫, 矩阵论方面的功夫. 那么, 这跟**马尔可夫链** (简称为马氏链) 有何关系?

对于马氏链, 基本的量是**转移概率矩阵** (也称为**随机矩阵**) $P = (p_{ij})$. 这种矩阵可由两个条件来刻画: 一切元素非负 ($p_{ij} \geqslant 0$) 而每一行和为 1 ($\sum_j p_{ij} = 1$). 我们有如下基本的极限性质.

定理 1.2. 若 P 为 (有限) 正方阵, 则对于一切 i 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} =: \pi_j > 0 \quad 而且 \quad \sum_j \pi_j = 1. \tag{1.2}$$

此处 $P^n = (p_{ij}^{(n)})$ 表示 P 的 n 次幂.

现在, 我们暂且从这里出发, 就正方阵这一基本情形证明华罗庚基本定理.

华罗庚基本定理的证明 (正方阵情形)

a) 首先, 对于不可约非负方阵, 有著名的

Perron-Frobenius 定理 不可约、非负方阵的最大特征根 ρ 为正, 而且它所对应的左、右特征向量 u (行向量) 和 v (列向量) 也都是正的.

无妨设 $uv = 1$ (归一化). 此定理容易从矩阵论的书籍中找到, 因而不再给出证明.

b) 其次, 由 $P^{n+1} = P^n P$ 易见, 定理 1.2 中的 π 满足方程 $\pi = \pi P$. 进而 $\pi = \pi P^n$. 由此及定理 1.2 易证, 满足方程 $\pi = \pi P$ 的分布 π 唯一. 现在, 对于给定的不可约正方阵 $A = (a_{ij})$, 命 $p_{ij} = \dfrac{a_{ij}v_j}{\rho(A)v_i}$, 则 (p_{ij}) 为正随机矩阵. 由

$$\sum_i u_i v_i p_{ij} = \frac{1}{\rho(A)} \sum_i u_i a_{ij} v_j = u_j v_j$$

及 $uv = 1$ 并应用定理 1.2, 得知这个随机矩阵有极限分布 $\pi_i = u_i v_i$. 由数学归纳法易证 $p_{ij}^{(n)} = \dfrac{a_{ij}^{(n)} v_j}{\rho(A)^n v_i}$. 于是由定理 1.2 得出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{ij}^{(n)}}{\rho(A)^n} = v_i \pi_j / v_j = v_i u_j.$$

写成矩阵形式

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^n = vu. \tag{1.3}$$

c) 设 $A > 0$, 则必定有 $A^{-1} \not\geqslant 0$. 无妨设 $\rho(A) = 1$ 且 $x_0 > 0$ 及 $x_0 v = 1$. 则由 $Av = v \Longrightarrow A^n v = v \Longrightarrow v = A^{-n} v$. 另一方面, 由 $x_n = x_0 A^{-n}$ 知

$$x_n v = x_0 A^{-n} v = x_0 v = 1.$$

于是若 $x_n > 0$ 对一切 n 成立, 则 $\{x_n : n \geqslant 1\}$ 为有界集, 因而其闭包必有极限点. 可抽子列 $\{n_k\}$ 使得

$$x_{n_k} \longrightarrow 某\ \bar{x} \geqslant 0 \quad 且 \quad \bar{x}v = 1. \tag{1.4}$$

最后, 由于

$$\begin{aligned} x_0 &= \lim_{k\to\infty} x_0 A^{-n_k} A^{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} A^{n_k} \\ &= \bar{x} v u \qquad (\text{由 } (1.3) \text{ 和} (1.4)) \\ &= u, \qquad (\text{由 } (1.4)) \end{aligned}$$

故为保证 $x_n > 0$ 对一切 n 成立, x_0 必须取为 u. □

留意在此证明中, 只需用到 (1.2) 便已足够. 而条件 "$A > 0$" 来自定理 1.2 中的假定 "$P > 0$". 我们将在下节放松这一条件. 现在, 我们回过头来证明定理 1.2.

定理 1.2 的证明 固定 j, 命

$$m_n = \min_i p_{ij}^{(n)}, \qquad M_n = \max_i p_{ij}^{(n)}.$$

以下的证明分三步.

1) $M_n \downarrow$, 2) $m_n \uparrow$, 3) $M_n - m_n \to 0$.

先证 1). 记 $\delta = \min\limits_{i,j} p_{ij}$. 取 $i_0 = i_0(n)$ 使 $m_n = p_{i_0 j}^{(n)}$. 则

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \max_i \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(n)} = \max_i \left[\sum_{k\neq i_0} p_{ik} p_{kj}^{(n)} + p_{ii_0} p_{i_0 j}^{(n)} \right] \\ &\leqslant \max_i \left[\sum_{k\neq i_0} p_{ik} M_n + p_{ii_0} m_n \right] = \max_i \left[(1 - p_{ii_0}) M_n + p_{ii_0} m_n \right] \\ &\leqslant M_n - (M_n - m_n)\delta. \end{aligned}$$

类似地可证 2):

$$m_{n+1} \geqslant m_n - (m_n - M_n)\delta.$$

故由上述两条得出 3):

$$0 \leqslant M_n - m_n \leqslant (M_1 - m_1)(1 - 2\delta)^{n-1} \to 0. \quad \square$$

事实上, 最后一步还给出了 $p_{ij}^{(n)}$ 收敛于 π_j 的一个收敛速度估计.

随机模型

在实际中, 效率方阵 A 并非决定性的, 总存在各种偶然性因素. 例如农业生产依赖于气候. 即使忘掉客观因素, 对于大矩阵 A, 特征值 ρ 也不可能精确算出, 误差总是存在的. 试问这些因素的影响如何? 首先的猜测可能是无所谓. 还是回到上述例子, 在每一年, 以随机矩阵 $A_n = (a_{ij}^{(n)})$ 代替上述的 $A = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij}^{(n)}$ 以概率 2/3 与决定性情形相同, 即仍然取值 a_{ij}. 但 $a_{ij}^{(n)}$ 以 1/6 的概率分别取值 $(1 \pm 0.01)a_{ij}$, 即以 1/3 的小概率作 1% 的小摄动. 进一步假定诸

$a_{ij}^{(n)}\ (i,j=1,2,\ n\geqslant 1)$ 相互独立. 我们还是从 $x_0=(44.344,\ 20)$ 出发, 其第 n 年崩溃的概率如下表.

n	1	2	3
概率	0	0.09	0.65

这表明在三年内崩溃的概率达 0.74, 与前面的决定性情形的 $T=8$ 相比, 相距甚远. 于是, 这个计划至多只能执行两年, 就必须进行调整. 以上讨论也表明, 在经济学的研究中, 如不考虑随机因素, 就会造成很大的失真. 这从一定角度上也解释了为什么人们普遍觉得投入产出法不好用. 随机因素被排除, 当然失真也就太大了. 初学概率论的人, 常以为概率论只是在人们说不清楚的问题上给出模糊的答案. 其实, 随机数学的运用, 会使问题的解答比决定性的处理更精密而不是更粗糙.

事实上, 在随机情形, 我们有

定理 1.3 (崩溃定理 ([6])). 在适当的条件下, 对于任何的 $x_0>0$, 崩溃时间以概率 1 有限, 即 $\mathbb{P}^{x_0}[T=\infty]=0$.

这里, 我们不准备详细解释定理中的 "适当的条件", 只是指出, 此定理的证明远非平凡. 需要用到随机矩阵乘积的极限理论这一当今概率论十分活跃的发展方向. 与独立随机变量和的极限理论相比, 此论题是如此年轻, 令人难以置信. 欲知详情, 请参考 [28] 及文中所列文献. 更新些, 作为随机矩阵理论和算子代数的交叉渗透, 十多年来形成了自由概率 (free probability) 的新的学科分支. 更多的信息可参见 [11,第 10 章].

注 1.4. 华罗庚先生最初研究此问题时主要是针对当时的计划经济而言的. 但他同时也指出此模型对市场经济也是适用的, 只不过产量指标 x_n 需换成价值指标. 详言之, 以 p_i 表示第 i 类产品的市场价格, 并命 V 为以 v_i/p_i 为元素的对角矩阵(回忆 (v_i) 是 $\rho(A)$ 的右特征向量). 则只需作如下变换即可

$$\begin{aligned}&A\longrightarrow V^{-1}AV,\\&\rho(A)\longrightarrow\rho(V^{-1}AV)=\rho(A),\\&u\longrightarrow uV.\end{aligned}$$

可见数学模型保持不变. 但需注意在市场经济中, 随机性还要大些.

注 1.5. 本节所讨论的无消费模型当然是理想化的, 更切合实际的是带消费模型. 假定把每种产品 $x^{(i)}$ 的增产部分拿出 $\theta^{(i)}\in(0,1)$ 的比例用于消费, 那么, 一年后能用于再生产的产综 (决定性情形) 为

$$y_1=x_0+(x_1-x_0)(I-\Theta)=y_0[A^{-1}(I-\Theta)+\Theta],\tag{1.5}$$

此处 $y_0 = x_0$. Θ 是以 $\{\theta^{(i)}\}$ 为元素的对角矩阵. 简记 $B = A^{-1}(I-\Theta)+\Theta$, 仿照本节开头所证, 得出第 n 年可用于再生产的产综为

$$y_n = y_0 B^n, \qquad n \geqslant 0.$$

可见, 从数学上讲, 我们只是用 B 代替 A^{-1} 而已. 然而, 带消费的经济模型更容易稳定, 这与实际相符 ([12]).

注 1.6. 对于带消费的经济模型, 应当有相应的崩溃定理, 但目前我们仅有部分解答 ([12]). 另一方面, 研究崩溃定理并非最终目的, 人们期望有某种最优的控制理论. 但此方向的研究目前尚属空白. 应当说, 目前经济数学的研究与实践依然有相当大的距离. 经济毕竟是一个极其庞大、极其复杂的系统, 也是一个有待开垦的大领域.

注 1.7. 正特征向量法已成为互联网搜索引擎的主要数学工具. 在网上搜索时, 我们输入若干关键词, 搜索引擎先搜索与这些关键词相关的网页,然后将网页排序输出. 排序的规则是网页的级别由高至低. 那么,这个级别如何定? 依据是网页之间的链接情况 (可适当加权). 基于不同的想法, 可以选用不同 (主要有三种) 的网页之间的链接矩阵 (相当于经济模型中的结构矩阵). 然后网页的级别就取为这个矩阵的正特征向量. 显然, 这方面的研究有着很大的应用价值和商业价值. 只要在

www.google.com

上输入关键词 "search engine, pagerank", 便可找到诸多文献. 参见 [41, 42].

注 1.8. 我们以经济模型为例, 说明马氏链的应用. 这自然是挂一漏万. 在此模型中, 因为客观上存在着随机性, 我们被迫要使用随机数学. 这是被动的. 但新近出现了反面, 即在客观上并不存在随机性的领域, 人们主动地使用随机数学. 典型的例子是随机算法, 而其中的重要武器之一就是马氏链. 例如参见 [55].

§1.2 离散时间马氏链 常返性与遍历性

上节已看到转移概率矩阵的极限性质 "$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$" 的重要作用, 并已就 "$P>0$" 的特殊情形证之. 本节的目的是处理更为一般的情形. 我们指出: 虽然此性质是纯分析的, 但一般情形的证明却需要概率方法. 在本节中, 我们将看到概率直觉的重要性.

马氏性

设 $E = \{i, j, k, \cdots\}$ 为有限集或可列集.

定义 1.9. 称 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 上、取值于空间 E 中的**马氏链**, 如下述马氏性成立: 对一切 $i_0,i_1,\cdots,i_n$ 有

$$\mathbb{P}[X_n=i_n|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}]=\mathbb{P}[X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1}],$$

倘若左边的条件概率有定义. 此时称 $p(n-1,i;n,j):=\mathbb{P}[X_n=j|X_{n-1}=i]$ 为在时刻 $n-1$ 处于 i、在时刻 n 转移到 j 的**转移概率**函数; 若它与 n 无关, 则记作 p_{ij}, 并称之为**齐次的**或**时齐的**.

马氏性有如下等价形式 (读者无妨自证之): 固定 "现在" $\{X_m=i\}$, 则对于任意的 "过去" $A\in\sigma(X_n:n<m)$ (由 $\{X_n:n<m\}$ 所生成的 σ 代数) 和将来 $B\in\sigma(X_n:n>m)$, 都有

$$\mathbb{P}[AB|X_m=i]=\mathbb{P}[A|X_m=i]\,\mathbb{P}[B|X_m=i].$$

即 "过去" 和 "将来" 关于 "现在" 条件独立. 若把条件 $\{X_m=i\}$ 去掉, 便成为独立而不只是条件独立. 这样, "马氏性" 乃最接近于 "独立性" 的一种 "相关性".

自此以后, 我们只限于齐次马氏链. 由定义 1.9 得出转移概率矩阵:

$$P=(p_{ij}),\qquad p_{ij}\geqslant 0,\qquad \sum_{j\in E}p_{ij}=1.$$

它表示齐次马氏链的一步转移概率. 进而, 由归纳法和马氏性易证, P 的 n 次幂 $P^n=\left(p_{ij}^{(n)}\right)$ 乃是此链的 n 步转移概率: $p_{ij}^{(n)}=\mathbb{P}[X_n=j|X_0=i]$. 特别地, $P^0=I$, 即 $p_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}$. 称 i **可达** j, 如果存在 $i_1,\cdots,i_n$ 使得 $p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}p_{i_nj}>0$, 或等价地, 存在 n 使得 $p_{ij}^{(n)}>0$. 如果任意的 i 可达任意的 j, 则概率矩阵 (或马氏链) 称为**不可约**.

有了矩阵 P 的概率解释之后, 我们便可引进各种随机变量或概率量.

常返性与正常返性

定义如下两个量.

首次回访时间: $\tau_j^+=\inf\{n\geqslant 1:X_n=j\}$, $j\in E$. 当此集合为空集时, 则定义 $\tau_j^+=+\infty$. $[\tau_j^+=\infty]$ 的含义指永不回到 j. 这里使用上标 "+" 是为区别于另一随机时间 $\tau_j=\inf\{n\geqslant 0:\ X_n=j\}$, 它称为**首达时**. 自此以后, 我们常把 $\mathbb{E}[\cdot|X_0=i]$ 和 $\mathbb{P}[\cdot|X_0=i]$ 分别简写成 $\mathbb{E}_i$ 和 $\mathbb{P}_i$. 定义

$$f_{ij}^{(n)}=\mathbb{P}_i[\tau_j^+=n]=\mathbb{P}_i[X_n=j,X_m\neq j,1\leqslant m<n],$$

它表示自 i 出发, 恰巧在第 n 步首次回访 j 的概率. 命 $f_{ij}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$, 它表示自 i 出发、经有限多步终于回到 j 的概率. 留意 $\mathbb{P}_i[\tau_j^+=\infty]=1-f_{ij}$.

再定义**平均回访时间** $\mathbb{E}_i\tau_j^+$:

$$m_{ij} = \mathbb{E}_i\tau_j^+ = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} nf_{ij}^{(n)}, & \text{若} f_{ij} = 1; \\ \infty, & \text{若} f_{ij} < 1. \end{cases}$$

定义 1.10. 称 j **常返**, 如 $f_{jj} = 1$; 否则称为**非常返**或**暂留**. 称 j **正常返**, 如 $\mathbb{E}_j\tau_j^+ < \infty$; 如 j 常返但非正常返, 则称它为**零常返**. 最后, 称**链常返** (**零常返**、**正常返**), 如它的一切状态如此.

从应用的角度来看, 三种常返性中, 正常返是最重要的. 好比每一位母亲都盼望她的游子能够 (在有限时间内) 常常回来探望. 然而, 从数学上讲, $f_{ij}^{(n)}$ 更为基本, 因为 f_{ij} 和 $\mathbb{E}_i\tau_j^+$ 都可经由它表出.

粗略地讲, 为得到非平凡极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$, 充要条件是 P (非周期) 正常返. 而在非常返或零常返情形, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. 这便是本节开头所提问题的概率解答, 也是本节的主要目标. 为此, 还需一段路程才能完成.

下面是关于常返性的一条判别准则.

定理 1.11. 状态 i 常返当且仅当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$. 在 i 非常返时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = (1 - f_{ii})^{-1}$.

我们先给出此定理的证明以资熟悉上述基本概念. 证明的关键在于如下分解.

引理 1.12. 对于一切 i, j 和 $n \geqslant 1$, 我们有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}. \tag{1.6}$$

证明 此证明用的是**首次进入法**, 即依照首次进入状态 j 的时刻进行分解 (即下面的第二个等式).

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i[X_n = j] &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_i[\tau_j^+ = m, X_n = j] \\ &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_i[\tau_j^+ = m]\,\mathbb{P}_i[X_n = j \mid \tau_j^+ = m] \\ &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_i[\tau_j^+ = m]\,\mathbb{P}[X_n = j \mid X_0 = i, X_\nu \neq j, 1 \leqslant \nu < m, X_m = j] \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} \mathbb{P}[X_n = j | X_m = j] \quad (\text{由马氏性})$$

$$= \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}, \qquad n \geqslant 1. \qquad \square$$

定理 1.11 的证明 留意

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} \quad (\text{由 } (1.6)) \\ &= \sum_{m=1}^{N} f_{ij}^{(m)} \sum_{n=m}^{N} p_{jj}^{(n-m)} = \sum_{m=1}^{N} f_{ij}^{(m)} \sum_{n=0}^{N-m} p_{jj}^{(n)}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

取 $j = i$ 并令 $N \to \infty$ 得出

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = f_{ii} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = f_{ii} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \right).$$

这便得出定理的后一项断言及前一项断言的必要性: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \Longrightarrow f_{ii} < 1$. 然而, 该断言的充分性 (即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \Longrightarrow f_{ii} = 1$) 却不能直接由此式得到, 因为这里出现了 ∞/∞ 问题. 为此, 引进母函数:

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_{ij}^{(n)}, \qquad F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n f_{ij}^{(n)}, \qquad s \in (0, 1).$$

(注意 $f_{ii}^{(n)} \leqslant p_{ii}^{(n)} \leqslant 1$, 此二函数项级数在 $s \in (0,1)$ 上是收敛的.) 则依照 (1.7) 的证明方法, 由 (1.6) 可得出

$$P_{ij}(s) - \delta_{ij} = P_{jj}(s) F_{ij}(s). \tag{1.8}$$

这样 $F_{ii}(s) = 1 - P_{ii}(s)^{-1}$. 由此及 $f_{ii} = \lim\limits_{s \uparrow 1} F_{ii}(s)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim\limits_{s \uparrow 1} P_{ii}(s)$ 立得所需断言. $\square$

上述 (1.8) 式还揭示了极限 $\lim\limits_{n \to \infty} p_{ii}^{(n)}$ 与概率量 $\mathbb{E}_i[\tau_i^+]$ 之间的内在关系:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} p_{ii}^{(n)} &= \lim_{s \uparrow 1} (1 - s) P_{ii}(s) \quad (\text{Abel 定理, 易证}) \\ &= \lim_{s \uparrow 1} \frac{1 - s}{1 - F_{ii}(s)} \quad (\text{由 } (1.8)) \\ &= \lim_{s \uparrow 1} \frac{1}{F_{ii}'(s)} \quad (\text{若设 } i \text{ 常返}) \\ &= 1/\mathbb{E}_i \tau_i^+. \end{aligned}$$

此关系在直观上并非显然, 但却是本节概率分析的导源.

关于常返性, 有如下简单性质.

推论 1.13. 对于不可约链, 一切状态同时常返或非常返.

证明 取 n, m 使 $p_{ij}^{(n)} > 0, p_{ji}^{(m)} > 0$. 那么, 由 $p_{jj}^{(m+\nu+n)} \geqslant p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(\nu)} p_{ij}^{(n)}$ 及定理 1.11 立知, 若 i 常返, 则 j 必定常返. □

推论 1.14. 设 j 常返. 若 j 可达 k, 则 $f_{kj} = 1$.

证明 定义

$$e_{jk}^{(n)} = \mathbb{P}_j[X_n = k, X_m \neq j, 0 < m < n]. \tag{1.9}$$

它表示自 j 出发、中途不经过 j 而在第 n 步到达 k 的概率. 因为 j 可达 k, 必存在 n 使得 $e_{jk}^{(n)} > 0$. 若 $f_{kj} < 1$, 则从 j 出发, 永不回到 j 的概率 $\mathbb{P}_j[\tau_j^+ = \infty] \geqslant e_{jk}^{(n)}(1 - f_{kj}) > 0$, 这与 j 的常返性相悖. □

下面是我们的第一条极限定理.

定理 1.15. 设 j 非常返, 则对于一切 $i \in E$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

证明 当 $i = j$ 时, 此结论来自定理 1.11. 当 $i \neq j$ 时, 使用 (1.6) 及控制收敛定理. 这是因为

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} = \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} I_{[m\leqslant n]}.$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)} = f_{ij} \leqslant 1, \quad \text{且当 } n \to \infty \text{ 时 } 1 \geqslant p_{jj}^{(n-m)} I_{[m\leqslant n]} \to 0. \qquad \square$$

周期性

前面已定义了不可约的概念. 留心对于一般的 E, 可能含有若干个不可约子集. 然而, 我们总可以把此链限于每一个不可约子集 (依然是马氏链) 而逐个处理 (详细讨论留到下节). 因而在这里我们着重处理一个不可约类.

我们的目标是研究极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$. 但目前可能出现复杂情况. 例如考虑非负整数集上的马氏链: $p_{i,i+1} > 0$, $p_{i,i-2} > 0$ 而其他的 $p_{ij} = 0$ (向前一步, 退后两步!). 那么, 从 i 出发, 至少要走三步才能回到 i. 即存在子列 (n_k) 使得 $p_{ii}^{(n_k)} = 0$. 为排除这一情况, 我们引入如下概念.

定义 1.16. 假设集合 $\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 非空. 命 d_i 为 $\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 的最大公约数, 并称之为状态 i 的**周期**. 当 $d_i = 1$ 时, 称状态 i **非周期**. 更进一步, 称链非周期, 如它的一切状态非周期. 非周期的正常返链称为**遍历**.

以后我们将证明非周期性的如下刻画 (命题 1.28): 状态 i 非周期, 当且仅当存在 N 使当 $n \geqslant N$ 时, $p_{ii}^{(n)} > 0$.

在矩阵论里 (有限情形), "不可约" 称为 "不可分拆" (或 "强连通"); 而把 "非周期" 称为 "强不可分拆". 相应的矩阵也称为 "原方阵".

极限定理

若已知存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, 则由 $P^{n+1} = P^n P$ 及 Fatou 引理得

$$\pi_j \geqslant \sum_i \pi_i p_{ij}. \tag{1.10}$$

从而 $(1 \geqslant) \sum\limits_j \pi_j \geqslant \sum\limits_i \pi_i \sum\limits_j p_{ij} = \sum\limits_i \pi_i$. 可见 (1.10) 式中的等号成立. 故得出方程 $\pi_j = \sum\limits_i \pi_i p_{ij}$, 或 $\pi = \pi P$. 进一步,

$$\pi = \pi P^n, \qquad n \geqslant 0. \tag{1.11}$$

此式表明, 若初分布 $\mathbb{P}[X_0 = i] = \pi_i$, 则此链在任何时刻 n 的分布都一样: $\mathbb{P}[X_n = i] = \pi_i$. 对于不可约链, 如有某个 $\pi_i > 0$, 则一切 $\pi_j > 0$. 事实上, 因存在 n 使 $p_{ij}^{(n)} > 0$, 从而由 (1.11) 知 $\pi_j \geqslant \pi_i p_{ij}^{(n)} > 0$. 故无妨设 (其实随后的定理 1.17 将证明) $\sum\limits_j \pi_j = 1$. 基于以上原因, 我们把 (π_i) 命名为链 (X_n) 或 P 的**平稳分布**. 与平稳分布紧密相连的概念是不变测度. $\mu = (\mu_i : i \in E)$ 称为 P 的**不变测度**, 如果 $0 < \mu_i < \infty$ 且 $\mu = \mu P$.

下面是离散时间马氏链的中心结果. 其证明包含了诸多的概率思想和技巧.

定理 1.17. 设 P 不可约. 则下述断言等价:

(1) P 正常返.

(2) P 有平稳分布 π. 进而, 平稳分布唯一: 对于一切 j, $\pi_j = m_{jj}^{-1}$, 此处 $m_{ij} = \mathbb{E}_i \tau_j^+$.

若 P 还是非周期的, 则 (1) 和 (2) 又都分别等价于

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$.

这个定理告诉我们在 (非周期) 正常返情形, $p_{ij}^{(n)}$ 的极限为正 (也是之所以称为正常返和遍历的原因). 另一方面, 定理 1.15 已表明在非常返情形, 此极限为零. 余下的只是零常返情形.

定理 1.18. 设 P 不可约且零常返, 则对于一切 $i, j \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

定理 1.17 的证明　i) 先证 (1) $\Longleftrightarrow$(2).

命 $e_{ji}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e_{ji}^{(n)}$, 这里 $e_{ji}^{(n)}$ 由 (1.9) 定义.

a) 往证: 如 j 常返, 则 $\sum\limits_{i}e_{ji}=m_{jj}\,(=\mathbb{E}_j[\tau_j^+])$.

这只需使用

$$\begin{aligned}\sum_i e_{ji}^{(n)}&=\sum_i\mathbb{P}_j[X_n=i,X_m\neq j,0<m<n]\\&=\mathbb{P}_j[X_m\neq j,0<m<n]=\mathbb{P}_i[\tau_j^+\geqslant n]\\&=1-f_{jj}+\sum_{m=n}^{\infty}f_{jj}^{(m)}\quad(\text{留意 }\mathbb{P}_j[\tau_j^+=\infty]=1-f_{jj})\\&=\sum_{m=n}^{\infty}f_{jj}^{(m)}.\end{aligned}$$

再对 n 求和即可.

b) 再证: 若 j 常返, 固定 j, 则 $(\mu_i:=e_{ji}:i\in E)$ 为不变测度.

由定义知,

$$e_{ji}^{(1)}=p_{ji},\qquad e_{ji}^{(n+1)}=\sum_{k\neq j}e_{jk}^{(n)}p_{ki},\quad n\geqslant 1.$$

故 (μ_i) 满足方程

$$\mu_i=\sum_{k\neq j}\mu_k p_{ki}+p_{ji}=\sum_k\mu_k p_{ki}.\tag{1.12}$$

最后一步用到常返性: $\mu_j=e_{jj}=1$. 进而有 $\mu=\mu P^n$, $n\geqslant 0$. 由不可约性知, 可取 n 使 $p_{ij}^{(n)}>0$. 于是

$$1=\mu_j=\sum_k\mu_k p_{kj}^{(n)}\geqslant\mu_i p_{ij}^{(n)}.$$

这表明 $\mu_i\leqslant 1/p_{ij}^{(n)}<\infty$, $i\in E$.

c) 试证: 对于不可约常返链, 若不计常数因子, 则不变测度唯一.

假设 $\nu=\nu P$. 无妨设 (ν_i) 非零 (即不全为零), 则由 $\nu=\nu P^n$ 及不可约性知, 一切 $\nu_i>0$. 今采用一种对偶技术, 即命 $\tilde{p}_{ij}=\nu_j p_{ji}/\nu_i$, 则易证 $\widetilde{P}=(\tilde{p}_{ij})$ 是一转移概率矩阵 (称为 P 的对偶), 而且也是不可约的. 此外, $\tilde{p}_{ij}^{(n)}=\nu_j p_{ji}^{(n)}/\nu_i$. 因而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\tilde{p}_{ii}^{(n)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$. 即 $\widetilde{P}$ 也常返. 另一方面, 依照 "在时刻 n 之前最后

一次访问 i 的时刻" 进行分解, 得出

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{P}_i[X_n = j, X_m = i, X_l \neq i, m < l < n] \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{P}_i[X_m = i] \mathbb{P}_i[X_n = j, X_l \neq i, m < l < n | X_m = i] \qquad (1.13) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} p_{ii}^{(m)} e_{ij}^{(n-m)}.
\end{aligned}
$$

由 (1.13) 并使用母函数方法得出: $P_{ij}(s) - \delta_{ij} = P_{ii}(s)E_{ij}(s)$ $(E_{ij}(s) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} s^n e_{ij}^{(n)})$. 从而由 b) 知 $\lim\limits_{s\uparrow 1} P_{ij}(s)/P_{ii}(s) = \lim\limits_{s\uparrow 1} E_{ij}(s) = e_{ij} < \infty$. 另一方面, 由 (1.8) 及推论 1.14 知, $\lim\limits_{s\uparrow 1} P_{ij}(s)/P_{jj}(s) = f_{ij} = 1$. 把它应用于 $\tilde{P}$ 得出 $\lim\limits_{s\uparrow 1} \tilde{P}_{ij}(s)/\tilde{P}_{jj}(s) = 1$. 综合这两件事实并使用 $\tilde{P}$ 的定义得到

$$
1 = \lim_{s\uparrow 1} \tilde{P}_{ij}(s)/\tilde{P}_{jj}(s) = \frac{\nu_j}{\nu_i} \lim_{s\uparrow 1} P_{ji}(s)/P_{jj}(s) = \frac{\nu_j}{\nu_i} e_{ji}.
$$

故 $\nu_i/e_{ji} = \nu_j$ 而与 i 无关.

d) 最后证明: 正常返 $\Longleftrightarrow$ 存在平稳分布.

设链正常返, 则由 a) 和 b) 知, $(\pi_i = e_{ji}/m_{jj} : i \in E)$ 是一平稳分布. 特别地, $\pi_j = \mu_j/m_{jj} = m_{jj}^{-1}$. 再则, 由 c) 知, 后一式子实际上对一切 j 成立. 这证得定理的第 (2) 部分的末项断言. 反之, 设 P 有平稳分布 π. 那么, 由 $\pi = \pi P^n$、定理 1.15 及控制收敛定理知, 此链不可能非常返. 然后由 b) 和 c) 知, P 有唯一不变测度. 再由 a) 和 b) 知, $m_{jj} < \infty$. 再用一次 c), 知后一式子对一切 j 成立.

ii) 次证 (2) $\Longleftrightarrow$ (3). 本定理之前已证 (3) $\Longrightarrow$ 存在平稳分布, 因而只需再证 (2) $\Longrightarrow$ (3). 由此推出: (3) 中所给的极限 $\pi = (\pi_i)$ 必定是一概率分布. 事实上, 若 (3) 成立, 则存在平稳分布 $\pi' = (\pi_i')$. 但下面所证 "(2) $\Longrightarrow$ (3)" 告诉我们 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j'$. 由此及所设 (3) 知, $\pi = \pi'$.

a) 取相互独立的两个马氏链 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$, 它们具有相同的转移概率 P, 但初始分布不同. 固定 i,

$$
\mathbb{P}[X_0 = i] = 1, \qquad \mathbb{P}[Y_0 = j] = \pi_j, \qquad j \in E.
$$

则由独立性知, $Z_n := (X_n, Y_n)$ 具有转移概率 $p_{(i,j),(k,\ell)} = p_{ik}p_{j\ell}$. 分别选 n_{ik} 和 $n_{j\ell}$ 使 $p_{ik}^{(n_{ik})} > 0$, $p_{j\ell}^{(n_{j\ell})} > 0$. 由于非周期性, 可选 $n_0 = n_0(k,\ell)$ 使当 $n \geqslant n_0$ 时, $p_{kk}^{(n)} p_{\ell\ell}^{(n)} > 0$. 于是, 当 $n \geqslant n_0$ 时, 我们有 $p_{(i,j),(k,\ell)}^{(n_{ik}+n_{j\ell}+n)} \geqslant p_{ik}^{(n_{ik})} p_{j\ell}^{(n_{j\ell})} p_{kk}^{(n_{ik}+n)} p_{\ell\ell}^{(n_{j\ell}+n)} > 0$. 可见 (Z_n) 也不可约非周期. 易见 (Z_n) 有平

稳分布 $(\pi_{(i,j)} = \pi_i\pi_j)$. 命 $\tau = \inf\{n \geqslant 0:\ Z_n = (i,i)\}$. 那么由上面 i) 中已证的 d) 知, 平稳 $\Longrightarrow$ 正常返 $\Longrightarrow$ 常返 $\Longrightarrow \mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$. (其实, 使用 i) 中之 d) 中所证的 "不可约平稳链必定常返" 便已足够.)

b) 另一方面, 对于任一 j, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_n = j, \tau \leqslant n] &= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}[X_n = j,\ \tau = m] = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k} \mathbb{P}[Z_n = (j,k),\ \tau = m] \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k} \mathbb{P}[\tau = m]\,\mathbb{P}[Z_n = (j,k)|\tau = m] \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k} \mathbb{P}[\tau = m]\mathbb{P}[Z_\ell = (j,k)|Z_1 \neq (i,i), \ell < m, Z_m = (i,i)] \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k} \mathbb{P}[\tau = m]\mathbb{P}[Z_n = (j,k)|Z_m = (i,i)] \quad (\text{由马氏性}) \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k} \mathbb{P}[\tau = m]\, p_{ij}^{(n-m)} p_{ik}^{(n-m)} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}[\tau = m]\, p_{ij}^{(n-m)}.
\end{aligned}$$

同样地,

$$\mathbb{P}[Y_n = j,\ \tau \leqslant n] = \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}[\tau = m]\, p_{ij}^{(n-m)}.$$

因此

$$\begin{aligned}
|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| &= |\mathbb{P}[X_n = j] - \mathbb{P}[Y_n = j]| \\
&= |\mathbb{P}[X_n = j,\ \tau > n] - \mathbb{P}[Y_n = j,\ \tau > n]| \\
&\leqslant \mathbb{P}[\tau > n] \to 0, \qquad n \to \infty.
\end{aligned}$$

最后一步用到 $0 \leqslant a,\ b \leqslant c \Longrightarrow |a - b| \leqslant c$. □

此定理的证明把两个马氏链放到同一概率空间来考察. 所得到的 (Z_n) 称为 (X_n) 和 (Y_n) 的一个**耦合**. 这是一种最简单的耦合 (**独立耦合**). 当然还有更为重要的非独立耦合. 耦合方法是现代概率论的最重要的发展之一. 关于耦合的许多迷人的故事, 可参考 [10].

对于不可约链, 由上面的证明 i) 中之 a)—c) 知, 若它有平稳分布, 则它的一切状态正常返. 反之, 若有一状态正常返, 则由上述证明知必定存在平稳分布, 进而一切状态正常返. 因而得出如下结论 (类似于推论 1.13).

推论 1.19. 对于不可约链, 它的一切状态或全为正常返或全为零常返.

定理 1.18 的证明 a) 固定 $i \neq j$. 依然使用上面的独立耦合, 只是因为现在并无预先给定的平稳分布 π, 改取 $\mathbb{P}[Y_0 = j] = 1$. 如果 (Z_n) 非常返, 则由定理 1.15 知,

$$(p_{ij}^{(n)})^2 = p_{(i,i),(j,j)}^{(n)} \to 0.$$

所述断言已真.

b) 今设 (Z_n) 零常返. 依上一定理证明的第二部分, 可证

$$\lim_{n\to\infty} |p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| = 0, \qquad \forall k \in E. \tag{1.14}$$

$\forall k \in E, \{p_{ik}^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ 有界, 从而存在收敛的子列. 利用对角线程序, 可抽子列 $\{n_m\}$ 使得 $v_k = \lim\limits_{m\to\infty} p_{ik}^{(n_m)}, \forall k \in E$. 再由 (1.14), 我们也有

$$v_k = \lim_{m\to\infty} p_{jk}^{(n_m)}, \qquad \forall k \in E.$$

无妨设 (v_k) 不全为零, 否则断言已真. 显然有 $\sum\limits_k v_k \leqslant 1$. 另一方面, 由控制收敛定理及 $P^{n_m+1} = PP^{n_m}$ 知,

$$\lim_{m\to\infty} p_{jk}^{(n_m+1)} = v_k, \qquad \forall k \in E.$$

再由 $P^{n_m+1} = P^{n_m}P$ 及 Fatou 引理导出

$$v_k \geqslant \sum_l v_l p_{lk}, \qquad \forall k \in E.$$

定理 1.17 之前已用过的证法表明, 此式的等号必须成立. 这样, 如有必要, 对 (v_j) 作归一化处理, 得知 P 有平稳分布. 由定理 1.17, 此链必定正常返而与所设矛盾.
□

容易看出, 不可约有限链必定是常返的. 进而, 由定理 1.17 的证明及 m_{jj} $\sum\limits_i e_{ij}$ 知, 此时链必定正常返. 换言之, 有限马氏链不可能零常返. 留心若 P 有周期 d, 则 P^d 便成为非周期的. 因而周期情形并无本质困难. 这样, 我们已完全证明了本章第一节中的华罗庚基本定理而无需假设 $P > 0$.

一般地讲, 上面关于常返性和遍历性的定义和判别准则都不易验证. 更为有效的判别准则乃是本章第四节的主题.

注 1.20. 定理 1.11 还有另一证法. 不用母函数而改用有限和逼近, 即使用下述比值极限定理, 它本身有独立的价值.

引理 1.21. 对于一切 i, j, 我们有

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N p_{ij}^{(n)} \Big/ \sum_{n=0}^N p_{jj}^{(n)} = f_{ij}.$$

定理 1.11 的另一证法 事实上, 由 $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ 及上式知

$$\lim_{N\to\infty}\left(1 - 1\Big/\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)}\right) = f_{ii}.$$

由此导出定理 1.11 的结论. □

引理 1.21 的证明 只需在下述初等分析引理中取

$$a_n = p_{jj}^{(n)},\quad n \geqslant 0;\qquad b_n = \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)},\quad n \geqslant 1,\ b_0 = 0,$$

并使用 (1.7). □

引理 1.22. 设 $(a_n : n \geqslant 0)$ 为不全为零的非负数列, 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n\Big/\sum_{m=0}^{n} a_m = 0.$$

则对于每一实数列 $(b_n : n \geqslant 0)$, 只要 $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在 (可以为 $\pm\infty$), 就有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\Big/\sum_{m=0}^{n} a_m = b.$$

证明 由所设条件, 对于每 $N \geqslant 1$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n-N+1}^{n} a_m\Big/\sum_{m=0}^{n} a_m = 0. \tag{1.15}$$

a) 先设 $|b| < \infty$. 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = N(\varepsilon)$ 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|b_n - b| \leqslant \varepsilon$. 于是存在 $B < \infty$ 使得 $|b_n - b| \leqslant B$ 对于一切 n 成立. 进而

$$\left|\sum_{m=0}^{n} a_m(b_{n-m} - b)\right| \leqslant \varepsilon\sum_{m=0}^{n-N} a_m + B\sum_{m=n-N+1}^{n} a_m.$$

两边同除以 $\sum\limits_{m=0}^{n} a_m$, 并使用 (1.15) 得出

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\Big/\sum_{m=0}^{n} a_m - b\right| \leqslant \varepsilon.$$

b) 对 $|b| = \infty$, 无妨设 $b = +\infty$. 则对于一切 $M > 0$, 存在 $N = N(M)$ 使得当 $n \geqslant N$ 时, $b_n \geqslant M$. 于是由

$$\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \geqslant M\sum_{m=0}^{n-N} a_m + \left(\min_{0\leqslant n\leqslant N} b_n\right)\sum_{m=n-N+1}^{n} a_m$$

易得所需结论. □

注 1.23. 类似地, 定理 1.17 第一部分证明 c) 的后半段, 也可不用母函数. 仿引理 1.21 的证法, 由引理 1.22 及定理 1.17 第一部分证明 b) 得出

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}p_{ij}^{(n)}\Big/\sum_{n=0}^{N}p_{ii}^{(n)}=e_{ij}<\infty.$$

由此及引理 1.14 和引理 1.21 (用于 $\widetilde{P}$) 得出

$$1=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\tilde{p}_{ij}^{(n)}\Big/\sum_{n=0}^{N}\tilde{p}_{jj}^{(n)}=\frac{\mu_j}{\mu_i}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}p_{ji}^{(n)}\Big/\sum_{n=0}^{N}p_{jj}^{(n)}=\frac{\mu_j}{\mu_i}e_{ji}.$$

故 $\mu_i/e_{ji}=\mu_j$, 而与 i 无关.

注 1.24. 在这里, 定理 1.17 和定理 1.18 的证明用的是较新些的耦合方法, 因而更具有概率直观. 它们的早先的证明是较为分析的.

§1.3 一般情形下的极限定理

对于不可约、非周期的马氏链, 我们已有完整的极限定理. 本节的目的是将这些成果拓广到一般情形. 为此, 需要对状态空间更细致地分类.

状态的分类及相空间的分解

定义 1.25. 给定 $P=(p_{ij})$. 称 i **直达** $j(\neq i)$, 如 $p_{ij}>0$; 记作 $i\to j$. 称 i **可达** $j(\neq i)$, 如存在 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 使得 $i\to i_1\to i_2\to\cdots\to i_m\to j$; 记作 $i\rightsquigarrow j$. 如 $i\rightsquigarrow j$ 且 $j\rightsquigarrow i$, 则称 i 和 j **互通**. 称状态 i 是**本质的**, 如 $i\rightsquigarrow j$ 时必有 $j\rightsquigarrow i$; 否则称为**非本质的**.

互通关系显然是可递的. 这样, 可依此关系对状态进行分类. 把含 i 的等价类记作 $C(i)$:

$$C(i)=\{i\}\cup\{j\neq i:\ i \text{ 和 } j \text{ 互通}\}.$$

$C(i)$ 中的状态, 如多于一个, 必定互通. 然而依然可能存在 $j\notin C(i)$ 使得 $i\rightsquigarrow j$ 但 $j\not\rightsquigarrow i$. 即 i 未必是本质的. 若 i 是本质的, 只要 $i\rightsquigarrow j$, j 也必定是本质的. 此时 $C(i)$ 构成 E 的一个不可约闭子集:

$$\sum_{k\in C(i)}p_{jk}=1,\qquad j\in C(i),$$

并且是最小闭子集, 即不存在 $C(i)$ 的闭的真子集. 由推论 1.14 知, 每一常返态必定是本质的, 因而所对应的 $C(i)$ 必是闭的. 一种特殊情况是 $p_{ii}=1$, 则依定义, i 是本质的且 $C(i)=\{i\}$. 此时称 i 为**吸收态**.

若 $\{n: p_{ii}^{(n)}>0\}$ 为空集，则状态 i 非本质. 这样，对于本质状态，我们总可以定义状态 i 的周期:

$$d_i = \text{集合 } \{n: p_{ii}^{(n)}>0\} \text{ 的最大公因子}.$$

关于周期的一个基本结果是

定理 1.26. 如 i 和 j 互通，则 $d_i = d_j$.

这样，对于一个不可约闭集，我们可以使用一个公共的周期 d. 我们有如下的重要性质.

命题 1.27. 设 C 为不可约闭集，其周期为 $d>1$. 那么，对于任给的 $i, j\in C$，若有 $p_{ij}^{(n_1)}>0$ 及 $p_{ij}^{(n_2)}>0$，则 n_1-n_2 可被 d 整除.

根据此定理，链在不可约闭集 C 中的运动有一半决定性的周期规律. 即我们可将 C 分成 d 个不交集:

$$C=\sum_{m=1}^{d} G_m.$$

从任一 G_m 中的状态出发，下一步转移必定落入 $G_{m+1(\bmod d)}$（详言之，可先固定一个状态 i，使用命题 1.27，依照每一步所能到达的状态作出一个分解；然后再证明所得的分解与预先固定的状态 i 无关）. 这样，若把 d 步转移视为新链的一步转移，则此链就变成非周期的了. 然而，对于这个新链而言，原来的 G_m 就变成闭子集了. 即新链可分为 d 个不可约子链.

上面的讨论表明：对于周期为 d 的不可约闭集 C，它的每一个状态 i 都满足 $p_{iC(i)}^{(nd)} := \sum_{j\in C(i)} p_{ij}^{(nd)}>0$. 此性质可部分地推广为

命题 1.28. 设状态 i 的周期为 d，则存在 N，使当 $n\geqslant N$ 时，$p_{ii}^{(nd)}>0$.

综合以上讨论及推论 1.13 和推论 1.19，可将任一马氏链的相空间作如下分解，它同时也描绘了系统（马氏链）运动的整体图像.

相空间的分解及系统运动的素描

(1) 若把每一不可约闭集称为一个类，则常返性、零常返性、正常返性、遍历性和周期性都是类性质，即同类中每一状态所共有的特征.

(2) 由零常返类 $\{C_i\}$、遍历类 $\{C_j\}$ 和正常返类 $\{C_k\}$ 的并集构成常返集 C. 从 C 中某一类 C_s 中的状态出发，系统只在该类 C_s 中运动. 在周期情形，系统具有半决定性的运动规律.

(3) 余下的状态的全体构成非常返集 D. 从 D 的状态出发，系统可能永远在 D 内运动；也可能落入 C 中的某一常返类而后永远在该类内运动.

极限定理的陈述

现在，我们可以详细陈述 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限性质. 回顾 $m_{ij} = \mathbb{E}_i\tau_j^+$; 当 j 常返时，$\pi_j = m_{jj}^{-1}$.

定理 1.29.

(1) 如 j 非常返，则对于一切 $i \in E$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

(2) 如 j 常返，设它的周期为 $d = d_j$. 则对于一切 i 和 $1 \leqslant r \leqslant d$ 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{m_{jj}} \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}. \tag{1.16}$$

特别地，设 i 为本质状态. 如 $i \notin C(j)$，则对于一切 $n \geqslant 1$，$p_{ij}^{(n)} = 0$. 如 $i \in C(j)$，则 $C(j) = C(i)$. 可设 j 属于 $C(i)$ 分解中的第 r 个子集 G_r. 那么

$$p_{ij}^{(n)} = 0, \qquad \text{如 } n \neq md + r; \tag{1.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{m_{jj}}. \tag{1.18}$$

此定理之所以较复杂，根本原因在于周期性. 若 j 非周期，则由此定理立即导出

推论 1.30. 若 j 非周期，则对于一切 $i \in E$ 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}\pi_j = f_{ij}/m_{jj}. \tag{1.19}$$

当 j 非常返时，约定 $m_{jj} = \infty$ (或 $\pi_j = 0$).

如果把关于 n 的逐点极限改为平均极限，则结果也十分简洁.

定理 1.31. 对于一切 $i, j \in E$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = f_{ij}\pi_j. \tag{1.20}$$

最后，留意对任意的平稳分布 π，总有 $\pi = \pi P^n$，进而 $\pi = \pi\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n} P^m\right)$. 利用定理 1.11, 定理 1.17, 定理 1.18 和定理 1.31, 容易证明 (不妨自证之) 如下的平稳分布的结构定理.

定理 1.32. 以 $\{C_\alpha\}$ 表示正常返不可约闭集的全体，命 $H = E \setminus \left(\bigcup\limits_{\alpha} C_\alpha\right)$. 则 P 的每一平稳分布形如

$$\pi_i = \begin{cases} 0, & \text{如 } i \in H; \\ \dfrac{\lambda_\alpha}{m_{ii}} = \lambda_\alpha \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{n} p_{ii}^{(m)}, & \text{如 } i \in C_\alpha. \end{cases}$$

其中 $\{\lambda_\alpha \geqslant 0\}$ 满足 $\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha = 1$.

结果的证明

本节的剩下部分用于证明上述诸结论. 我们将证明主要定理 1.29 和定理 1.31, 然后再回去证明之前的结论. 我们将看到, 有了上一节的基本定理之后, 这里的主要定理的证明并不困难.

定理 1.29 的证明

a) 结论 (1) 乃是定理 1.11. 以下假设 j 常返. 当 $i \notin C(j)$ 且 i 为本质状态时, 显然有 $p_{ij}^{(n)} = 0$ 对一切 $n \geqslant 1$ 成立. 否则由 $i \rightsquigarrow j$ 且 i 本质导出 $j \rightsquigarrow i$, 因而 $i \in C(j)$. 这导致矛盾.

b) 使用首次进入法得出

$$p_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{v=0}^{nd+r} f_{ij}^{(nd+r-v)} p_{jj}^{(v)} = \sum_{m=0}^{n} f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant d. \tag{1.21}$$

后一等号用到 j 的周期性: 当且仅当 $n = md$ 时, $p_{jj}^{(n)} \neq 0$. 另一方面, 将定理 1.17 用于以 $\tilde{P} = P^d$ 为转移矩阵的新链中含状态 j 的不可约闭集 (它是非周期的), 得出 $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{p}_{jj}^{(n)} = 1/\tilde{m}_{jj}$. 由于 $\tilde{p}_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(nd)}$, $\tilde{m}_{jj} = m_{jj}/d$. 故有

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd)} = d/m_{jj}. \tag{1.22}$$

综合 (1.21) 和 (1.22) 便得出 (1.16).

c) 如本质状态 $i \in C(j)$ 而 j 属于 $C(i)$ 分解式中的第 r 个子集, 则显然 $p_{ij}^{(n)} = 0$ 对一切 $n \neq md + r$ 成立, 此即是 (1.17). 当然更有 $f_{ij}^{(n)}$ 对一切 $n \neq md + r$ 成立. 于是 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}$. 这样, (1.18) 来自 (1.16) 式及推论 1.14. □

定理 1.31 的证明 当 j 非常返时, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 及 $\pi_j = 0$ 立知结论成立. 当 j 常返时, 由 (1.16) 知,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = d\pi_j \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant d.$$

这样, 所述结论可由下述引理导出:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \frac{1}{d} \sum_{r=1}^{d} d\pi_j \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)} = f_{ij}\pi_j. \qquad \square$$

引理 1.33. 设有正整数 d 和数列 $\{a_n : n \geqslant 1\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_{nd+r} = b_r, \qquad 1 \leqslant r \leqslant d,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a_m=\frac{1}{d}\sum_{m=1}^{d}b_m.$$

证明　因为数列的平均极限必重合于自身的极限, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a_{md+r}=b_r.$$

记 $A=\sup\limits_{n\geqslant 1}a_n,\ n=md+s,\ 1\leqslant s\leqslant d$, 则

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}a_v-\frac{1}{d}\sum_{v=1}^{d}b_v\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{v=md+1}^{md+s}a_v+\left|\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{md}a_v-\frac{1}{d}\sum_{v=1}^{d}b_v\right|$$
$$\leqslant\frac{Ad}{n}+\frac{1}{d}\sum_{r=1}^{d}\left|\frac{md}{n}\frac{1}{m}\sum_{v=0}^{m-1}a_{vd+r}-b_r\right|.$$

令 $n\to\infty$, 则 $m\to\infty$ 且 $md/n\to 1$. 由此及前一式子得出所述结论.　□

现在我们回过头来证明本节开头所述的关于周期性的若干初等性质.

定理 1.26 的证明　设 $p_{ij}^{(m)}>0$, $p_{ji}^{(n)}>0$, 则 $p_{ii}^{(m+n)}\geqslant p_{ij}^{(m)}p_{ji}^{(n)}>0$. 于是 $d_i|(m+n)$. 同理 $d_j|(m+n)$. 若 $p_{ii}^{(\ell)}>0$, 则 $p_{jj}^{(m+n+\ell)}\geqslant p_{ji}^{(n)}p_{ii}^{(\ell)}p_{ij}^{(m)}>0$. 故 $d_j|(m+n+\ell)$. 这两个事实表明 $d_j|\ell$, 于是 $d_j|d_i$. 由 i 和 j 的对称性知 $d_i|d_j$. 故必定有 $d_i=d_j$.　□

命题 1.27 的证明　因为 $j\rightsquigarrow i$, 存在 m 使 $p_{ji}^{(m)}>0$. 这样,

$$p_{ii}^{(m+n_1)}\geqslant p_{ij}^{(n_1)}p_{ji}^{(m)}>0,\qquad p_{ii}^{(m+n_2)}\geqslant p_{ij}^{(n_2)}p_{ji}^{(m)}>0.$$

这表明 $d_i|(m+n_1)$ 且 $d_i|(m+n_2)$. 故必有 $d_i|(n_1-n_2)$.　□

命题 1.28 的证明　要点是使用初等数论的如下结果: 若正整数 s_1, s_2, $\cdots$, s_m 有最大公因子 d, 则存在正整数 N, 使当 $n\geqslant N$ 时有非负整数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使得 $nd=\sum\limits_{k=1}^{m}c_ks_k$.

今选 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 使得 $p_{ii}^{(s_k)}>0$ 且它们有最大公因子 d. 由上述结论, 存在 N, 使当 $n\geqslant N$ 时, 有非负整数 $\{c_k\}$ 使得 $nd=\sum\limits_{k=1}^{m}c_ks_k$. 因而

$$p_{ii}^{(nd)}\geqslant\left(p_{ii}^{(s_1)}\right)^{c_1}\cdots\left(p_{ii}^{(s_m)}\right)^{c_m}>0.\qquad\square$$

注 1.34. 定理 1.29 和定理 1.31 依然可作进一步的改进. 设 C 是任一常返的不可约闭集, 它有分解 $\{G_r\}_{r=1}^{d}$. 命

$$f(i,r,G_v)=\mathbb{P}_i[\text{ 存在 } n\equiv r\ (\mathrm{mod}\ d)\text{ 使得 } X_n\in G_v]$$
$$f(i,C)=\mathbb{P}_i[\text{ 存在 } n \text{ 使得 } X_n\in C\ ].$$

那么, (1.16) 可换成

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{m_{jj}} f(i,r,G_v), \qquad \text{如 } j \in G_v. \tag{1.23}$$

而 (1.20) 可换成

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = f(i,C)\pi_j, \qquad \text{如 } j \in C. \tag{1.24}$$

其加强之处在于系数只依赖于所在的类而不是具体的状态. 这些结论可由下述两条推出:

(1) 对于任一 G_v 和 $1 \leqslant r \leqslant d$, 我们有 $f(i,r,G_v) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}$.

(2) 对于任一 $j \in C$, 我们有 $f(i,C) = f_{ij}$.

证明 此处只证明断言 (1), 断言 (2) 的证明类似. 简记 $f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}$. 首先, 显然有 $f_{ij}(r) \leqslant f(i,r,G_v)$. 反之, 我们有

$$f_{ij}(r) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in G_v} \mathbb{P}_i[X_{nd+r} = k,\ X_{vd+r} \neq k,\ 0 \leqslant v < n]\, f_{kj}(d).$$

留心当 $k, j \in G_v$ 时, $f_{kj}(d) = f_{kj} = 1$. 由此导出反向不等式. □

§1.4 若干判别准则 最小非负解

判别准则

本节是第二节的继续. 我们将给出一些不等式型判别准则. 首先是关于常返性.

定理 1.35. 设 $P = (p_{ij})$ 不可约; H 为 E 的非空有限子集. 则此链常返当且仅当存在有限的 (y_i) 满足

$$\begin{cases} \sum_{j\in E} p_{ij} y_j \leqslant y_i, & i \notin H, \\ \lim_{i\to\infty} y_i = \infty. \end{cases} \tag{1.25}$$

最后的极限是把 E 视为 $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\cdots\}$ 来处理. 但这并不影响一般性.

其次, 用同样的方法来讨论遍历性以及收敛速度. 最典型的速度是几何式收敛速度.

定理 1.36. 设 P 不可约、非周期，H 为 E 的有限子集. 则此链正常返 (遍历) 当且仅当不等式

$$\begin{cases} \sum_j p_{ij}y_j \leqslant y_i - 1, \quad i \notin H, \\ \sum_{i\in H}\sum_j p_{ij}y_j < \infty \end{cases} \tag{1.26}$$

有有限非负解.

典型的用法是使用多项式函数 $y_i = c(1+i^m)$.

称链**几何遍历**, 如存在 $\beta < 1$ 使得对一切 i, j, n, 有

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leqslant c_{ij}\beta^n.$$

定理 1.37. 设 P 和 H 同上. 则此链几何遍历当且仅当对某 $\epsilon > 0$, 不等式

$$\begin{cases} \sum_j p_{ij}y_j \leqslant y_i(1-\epsilon) - 1, \quad i \notin H, \\ \sum_{i\in H}\sum_j p_{ij}y_j < \infty \end{cases} \tag{1.27}$$

有有限非负解.

这些结果的漂亮之处在于: 条件均由 $P = (p_{ij})$ 决定. 它们的证明需要使用下一部分所介绍的数学工具.

最小非负解理论

在研究马氏链时, 常常需要研究无穷线性方程组. 因为非有限维, 线性代数方法无效. 需要新的工具. 20 世纪 70 年代, 我国数学家侯振挺发展了最小非负解理论这一数学工具. 参考 [29], 这里的陈述取自 [5].

我们常联系于两类方程

$$x_i = \sum_{k\in E} c_{ik}x_k + b_i, \qquad i \in E;$$

$$x_i(t) = \sum_{k\in E}\int_0^t c_{ik}(s)x_k(s)\mathrm{d}s + b_i(t), \qquad i\in E,\ t \geqslant 0,$$

此处 c_{ik}, $b_i \geqslant 0$.

下面介绍一种抽象的形式. 使用如下一些记号.

E: 任意非空集.

$\mathscr{H} \subset \{f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]\}$ 满足条件:

(1) $1 \in \mathscr{H}$;

(2) 对非负线性组合运算封闭: $f_1, f_2 \in \mathscr{H}$, $c_1, c_2 \geqslant 0 \Longrightarrow c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathscr{H}$;

(3) 单调函数列极限运算封闭: $f_n \in \mathscr{H}$, f_n 逐点单增$\Longrightarrow \lim\limits_n f_n \in \mathscr{H}$.

算子 $A: \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ 满足条件:

(1) $A0 = 0$;

(2) 对非负线性组合运算封闭 (锥射): $f_1, f_2 \in \mathscr{H}$, $c_1, c_2 \geqslant 0 \Longrightarrow A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2$;

(3) 单调函数列极限运算封闭: $f_n \in \mathscr{H}$, f_n 逐点单增$\Longrightarrow \lim\limits_n A f_n \uparrow A \lim\limits_n f$.

将满足上述条件的算子 A 的全体记作 $\mathscr{A}$. 对 $A, \tilde{A}, A_n \in \mathscr{A}$, $A \leqslant \tilde{A}$ 如果 $Af \leqslant \tilde{A}f, \forall f \in \mathscr{H}$; $A_n \uparrow A$ 如果 $A_N f \uparrow Af, \forall f \in \mathscr{H}$.

定义 1.38. 给定 $A \in \mathscr{A}$, $g \in \mathscr{H}$. 称 f^* 为方程

$$f = Af + g \tag{1.28}$$

的最小 (非负) 解, 若 f^* 满足 (1.28), 且对 (1.28) 的任一解 $\tilde{f}$, 均有 $\tilde{f} \geqslant f^*$.

定理 1.39 (存在唯一性定理). 最小解总存在且唯一. 若令

$$f^{(0)} = 0, \quad f^{(n+1)} = Af^{(n)} + g, \qquad n \geqslant 0, \tag{1.29}$$

则 $f^{(n)} \uparrow f^*$.

证明 显然, $f^{(n)} \in \mathscr{H}$, $f^{(n)} \uparrow$. 故极限存在 (可以为 $+\infty$). 故由

$$f^* = \lim_n f^{(n+1)} = \lim_n [Af^{(n)} + g] = Af^* + g$$

知 f^* 是一解. 今设 $\tilde{f} \in \mathscr{H}$ 是另一解, 则 $\tilde{f} \geqslant 0 = f^{(0)}$. 如设 $\tilde{f} \geqslant f^{(n)}$, 则

$$\tilde{f} = A\tilde{f} + g \geqslant Af^{(n)} + g = f^{(n+1)}.$$

故由归纳法知 $\tilde{f} \geqslant f^{(n)}$ 对一切 n 成立, 当然就有 $\tilde{f} \geqslant f^*$. 这证得最小性. 满足最小性的两个解必定重合. □

称方程 (1.28) 是齐次的, 若 $g = 0$. 此时易证 $f^* = 0$. 下面是两个简单方程及其最小解.

$$x = x \Longrightarrow x^* = 0; \qquad x = x + 2 \Longrightarrow x^* = \infty.$$

定理 1.40 (比较定理). 设 $A, \tilde{A} \in \mathscr{A}$, $g, \tilde{g} \in \mathscr{H}$ 满足

$$\tilde{A} \geqslant A, \quad \tilde{g} \geqslant g.$$

则对于任一满足 $\tilde{f} \geqslant \tilde{A}\tilde{f} + \tilde{g}$ 的 $\tilde{f} \in \mathscr{H}$ 均有 $\tilde{f} \geqslant$ (1.28) 的最小解 f^*.

最小解由 A 及 g 唯一确定, 故可记 $f^* = m_A(g)$.

定理 1.41 (线性组合定理). 设 G 可数, $\{a_s : s \in G\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. 则

$$m_A\left(\sum_{s \in G} a_s g_s\right) = \sum_{s \in G} a_s m_A(g_s).$$

定理 1.42 (单调收敛定理). 设 $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$, $A_n \uparrow A$, $\{g_n\} \subset \mathscr{H}$, $g_n \uparrow g$, 则 $A \in \mathscr{A}$, $g \in \mathscr{H}$ 且 $m_{A_n}(g_n) \uparrow m_A(g)$.

存在定理中 f^* 的解法称为**第一迭代法**. 下述末一结论称为**第二迭代法**.

定理 1.43. 设 $\{g_n\}_1^\infty \subset \mathscr{H}$. 令

$$\tilde{f}^{(1)} = g_1, \quad \tilde{f}^{(n+1)} = A\tilde{f}^{(n)} + g_{n+1}, \quad n \geqslant 1. \tag{1.30}$$

如 $\sum\limits_{k=1}^{n} g_k \uparrow g$, 则 $m_A(g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{f}^{(n)}$. 特别地, 若令

$$\tilde{f}^{(1)} = g, \quad \tilde{f}^{(n+1)} = A\tilde{f}^{(n)}, \tag{1.31}$$

则

$$m_A(g) = f^* = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}^{(n)}.$$

以上结果均可使用归纳法证之.

引理 1.44. 设 $c_{ij}, b_i \in [0, \infty)$, $i, j \in E$.

(1) 设 $(x_i^* : i \in E)$ 是方程

$$x_i = \sum_j c_{ij} x_j + b_i, \qquad i \in E$$

的最小解. 给定 $j \in E$. 假定存在 $i = i_0, i_1, \cdots, i_n = j$ 使得 $c_{i_0 i_1} \cdots c_{i_{n-1} i_n} > 0$, 则

i) $x_i^* < \infty \Longrightarrow x_j^* < \infty$.

ii) 若再设

$$\sum_j c_{ij} + b_i \leqslant 1, \quad i \in E. \tag{1.32}$$

则 $x_i^* = 1 \Longrightarrow x_j^* = 1$.

特别地, 若 (c_{ij}) 不可约, 则对于情况 i), 或者对于一切 $i \in E$ 都有 $x_i^* = \infty$ 或者对于一切 i 都有 $x_i^* < \infty$; 对于情况 ii), 或者对于一切 i 都有 $x_i^* = 1$ 或者对于一切 i 都有 $x_i^* < 1$.

(2) 固定 $j_0 \in E$. 设 $(x_i^* : i \in E)$ 是方程

$$x_i = \sum_{j \neq j_0} c_{ij} x_j + b_i, \qquad i \in E \tag{1.33}$$

的最小解. 则 $x_i^* < \infty$ 对于一切 $i \in E$ 成立当且仅当 $x_i^* < \infty$ 对于一切 $i \neq j_0$ 成立而且 $\sum\limits_{k \neq j_0} c_{j_0 k} x_k^* < \infty$. 若

$$\sum_{j \neq j_0} c_{ij} + b_i = 1, \qquad i \in E,$$

则 $x_i^* = 1$ 对于一切 $i \in E$ 成立当且仅当 $x_i^* = 1$ 对于一切 $i \neq j_0$ 成立.

证明 a) 设 $x_i^* < \infty$ 且

$$c_{ii_1} c_{i_1 i_2} \cdots c_{i_{n-1} i_n} > 0,$$

则由

$$\infty > x_i^* = \sum_k c_{ik} x_k + b_i \geqslant c_{ii_1} x_{i_1}^*$$

知 $x_{i_1}^* < \infty$. 同样可证

$$x_{i_2}^* < \infty, \cdots, x_{i_n}^* < \infty.$$

现在, 不可约性推出 $x_j^* < \infty$ 对于一切 $j \in E$ 成立.

b) 假定 (1.32) 成立, 显然由第一迭代法知 $x_i^* \leqslant 1, \forall i \in E$. 设 $x_i^* = 1$ 且

$$c_{ii_1} c_{i_1 i_2} \cdots c_{i_{n-1} i_n} > 0.$$

若 $x_{i_1}^* < 1$, 则

$$1 = x_i^* = c_{ii_1} x_{i_1}^* + \sum_{j \neq i_1} c_{ij} x_j^* + b_i < c_{ii_1} + \sum_{j \neq i_1} c_{ij} x_j^* + b_i \leqslant \sum_j c_{ij} + b_i \leqslant 1.$$

这导致矛盾. 因此有 $x_{i_1}^* = 1$. 依此递推,

$$x_{i_2}^* = 1, \cdots, x_{i_n}^* = 1.$$

由不可约性, 实际对于一切 $i \in E$, 有 $x_i^* = 1$.

c) 若 $(x_i^* : i \in E)$ 是方程 (1.33) 的最小解, 则易见 $(x_i^* : i \neq j_0)$ 是方程

$$x_i = \sum_{j \neq j_0} c_{ij} x_j + b_i, \quad i \neq j_0$$

的最小解. 由此立即导出末项断言. □

下面给出最小解理论的初步应用. 这些理论更广泛的应用, 可参考 [29].

命题 1.45. 固定 j, 则 $(f_{ij} : i \in E)$ 是方程

$$x_i = \sum_{k \neq j} p_{ik} x_k + p_{ij}$$

的最小解.

证明 显然 $x_i^{(1)} = p_{ij} = f_{ij}^{(1)}$. 设 $x_i^{(n)} = f_{ij}^{(n)}$, 则

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} x_k^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n)} = f_{ij}^{(n+1)}.$$

由第二迭代法知, $x_i^* = f_{ij}$. □

命题 1.46. 假设链常返. 固定 j, 则 $(m_{ij} : i \in E)$ 是方程

$$x_i = \sum_{k \neq j} p_{ik} x_k + f_{ij}$$

的最小解.

证明 命

$$y_i^{(1)} = f_{ij}^{(1)}, \quad y_i^{(n+1)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} y_k^{(n)} + f_{ij}^{(n+1)}.$$

设 $y_i^{(n)} = n f_{ij}^{(n)}$, 则

$$y_i^{(n+1)} = n \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n)} + f_{ij}^{(n+1)} = n f_{ij}^{(n+1)} + f_{ij}^{(n+1)} = (n+1) f_{ij}^{(n+1)}$$

故由定理 1.43 知 $x_i^* = \sum_{n=1}^{\infty} y_i^{(n)} = m_{ij}$. □

在以下的证明中, 只讨论 H 为单点集, 无妨设 $H = \{0\}$. 对于一般有限集 H 的证明, 参考 [10, §4.3 –§4.5].

定理 1.35 的证明 定义一个新的转移矩阵 $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$:

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i = 0; \\ p_{ij}, & i \neq 0. \end{cases}$$

此时 0 为吸收点, 从而 $\forall j \neq 0$ 是非本质点. 由于常返点皆本质点, 由定理 1.15 知对任意 $j \neq 0$, $\lim_{n \to \infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} = 0$. 又易见 $\tilde{f}_{i0}^{(n)} = f_{i0}^{(n)}$ 及 $\tilde{p}_{i0}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{i0}^{(m)}$, 于是 $\lim_{n \to \infty} \tilde{p}_{i0}^{(n)} = f_{i0}$.

a) 充分性 设 (y_i) 为所示的解, 则

$$\sum_j \tilde{p}_{ij} y_j \leqslant y_i, \quad i \in E.$$

从而

$$\sum_j \tilde{p}_{ij}^{(n)} y_j \leqslant y_i, \quad i \in E, n \geqslant 1.$$

因此

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j \leqslant N} \tilde{p}_{ij}^{(n)} + \sum_{j > N} \tilde{p}_{ij}^{(n)} \leqslant \sum_{j \leqslant N} \tilde{p}_{ij}^{(n)} + \sum_{j > N} \tilde{p}_{ij}^{(n)} \frac{y_j}{\inf\limits_{k > N} y_k} \\ &\leqslant \sum_{j \leqslant N} \tilde{p}_{ij}^{(n)} + \frac{y_i}{\inf\limits_{k > N} y_k}. \end{aligned}$$

在上式中先让 $n \to \infty$, 再让 $N \to \infty$, 得到 $f_{i0} = 1, \forall i \neq 0$. 对 P 应用命题 1.45 可知, $f_{00} = \sum\limits_{j \neq 0} p_{0j} f_{j0} + p_{00} = 1$. 从而 P 常返.

b) 必要性 记 $\tilde{P}$ 对应的过程为 $\tilde{X}_n$, 定义

$$\tilde{\eta}_i(n) = \mathbb{P}_i[\exists\, m \geqslant 0,\ \text{使得}\ \tilde{X}_m \geqslant n],$$

则 $\forall n > 0, \tilde{\eta}_0(n) = 0; \forall i \geqslant n, \tilde{\eta}_i(n) = 1$. 因为 P 常返, 所以 $f_{i0} = 1, \forall i \geqslant 0$. 于是

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{\eta}_i(n) = 0, \quad i \geqslant 0.$$

选取 $n_k \uparrow$ 使得 $\tilde{\eta}_i(n_k) < 2^{-k}$, $i \leqslant k$. 定义 $y_i = \sum\limits_{k \geqslant 1} \tilde{\eta}_i(n_k) < \infty$, 则由 Fatou 引理

$$\varliminf_{i \to \infty} y_i = \varliminf_{i \to \infty} \sum_{k \geqslant 1} \tilde{\eta}_i(n_k) \geqslant \sum_{k \geqslant 1} \varliminf_{i \to \infty} \tilde{\eta}_i(n_k) = \infty.$$

由马氏性容易验证

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_i(n) &= \mathbb{P}_i[\exists m \geqslant 0,\ \text{使得}\ \tilde{X}_m \geqslant n] \\ &\geqslant \sum_j \mathbb{P}_i[\exists m \geqslant 1,\ \text{使得}\ \tilde{X}_m \geqslant n, \tilde{X}_1 = j] \\ &= \sum_j \mathbb{P}_i[\tilde{X}_1 = j] \mathbb{P}_j[\exists m \geqslant 0,\ \text{使得}\ \tilde{X}_m \geqslant n] \\ &= \sum_j \tilde{p}_{ij} \tilde{\eta}_j(n). \end{aligned}$$

因此对 $i \neq 0$,

$$y_i = \sum_{k \geqslant 1} \tilde{\eta}_i(n_k) \geqslant \sum_j \tilde{p}_{ij} y_j = \sum_j p_{ij} y_j. \quad \square$$

定理 1.47. 设 P 不可约, 则链非常返当且仅当方程

$$\sum_{j\in E} p_{ij}y_j = y_i, \quad i \notin H$$

有非常数的有界解.

证明　仍假定 H 为单点集 $\{0\}$, 并考虑定理 1.35 的证明中所定义的马氏链 $\tilde{P}$. 假设链非常返, 则存在 $i \neq 0$ 使得 $\tilde{f}_{i0} = f_{i0} < 1$. 因为 $\tilde{f}_{00} = 1$, 容易验证

$$\sum_{j\in E} \tilde{p}_{ij}\tilde{f}_{j0} = \tilde{f}_{i0}, \quad i \in E.$$

即 $(y_i = \tilde{f}_{i0} : i \in E)$ 为所要求的非常数的有界解.

反之, 假设方程有有界非常数解 (y_i), $y_i \leqslant M < \infty$. 因为

$$\sum_{j\in E} \tilde{p}_{ij}y_j = y_i, \quad i \in E,$$

于是

$$\sum_{j\in E} \tilde{p}_{ij}^{(n)}y_j = y_i, \quad i \in E, n \geqslant 1.$$

如果链常返, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{p}_{i0}^{(n)} = f_{i0} = 1$, 从而

$$\sum_{i\neq 0} \tilde{p}_{ij}^{(n)}y_j \leqslant M(1 - \tilde{p}_{i0}^{(n)}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此

$$y_i = \sum_{i\neq 0} \tilde{p}_{ij}^{(n)}y_j + \tilde{p}_{i0}^{(n)}y_0 \to y_0,$$

这与 (y_i) 非常数矛盾.　□

定理 1.36 的证明　今设链正常返, 则由命题 1.46 知,

$$m_{i0} = \sum_{k\neq 0} p_{ik}m_{k0} + 1, \quad \forall i \in E,$$

或

$$\sum_{k\neq 0} p_{ik}m_{k0} = m_{i0} - 1, \quad \forall i \in E. \tag{1.34}$$

取 $y_0 = 0$, $y_i = m_{i0}$, $i \neq 0$. 则当 $i \neq 0$ 时, 定理 1.36 的条件已满足. 而当 $i = 0$ 时, 由正常返知 $m_{00} < \infty$, 从而由 (1.34) 得出

$$\sum_{k} p_{0k}y_k = \sum_{k\neq 0} p_{0k}m_{k0} = m_{00} - 1 < \infty.$$

从而该定理的条件也满足. 这证得定理 1.36 的条件的必要性.

反之, 设 (y_i) 为不等式 (1.26) 的解. 记 $c = \sum_j p_{0j} y_j < \infty$. 命

$$y_i^{(1)} = y_i,\ i \in E; \qquad y_i^{(n+1)} = \sum_j p_{ij}^{(n)} y_j,\ n \geqslant 1.$$

则 $y_0^{(2)} = c$, $y_j^{(2)} \leqslant y_j - 1\,(j \neq 0)$. 进而

$$\begin{aligned} y_i^{(n+2)} &= \sum_j p_{ij}^{(n+1)} y_j = \sum_{j,k} p_{ik}^{(n)} p_{kj} y_j \\ &= \sum_j p_{ij}^{(n)} y_j^{(2)} \leqslant c p_{i0}^{(n)} + \sum_{j \neq 0} p_{ij}^{(n)} (y_j - 1) \\ &= c p_{i0}^{(n)} + \sum_j p_{ij}^{(n)} y_j - \sum_{j \neq 0} p_{ij}^{(n)} - p_{i0}^{(n)} y_0 \\ &\leqslant (1 + c) p_{i0}^{(n)} + y_i^{(n+1)} - 1 \end{aligned}$$

由此及归纳法可见, 对于一切 n 和 i, $y_i^{(n)} < \infty$. 进而递推得出

$$y_i^{(n+2)} \leqslant (1 + c) \sum_{r=1}^{n} p_{i0}^{(r)} + y_i^{(2)} - n,$$

$$\frac{y_i^{(n+2)}}{n} \leqslant (1 + c) \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} p_{i0}^{(r)} + \frac{y_i^{(2)}}{n} - 1.$$

命 $n \to \infty$, 由定理 1.31 得出

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant (1 + c) f_{i0} \pi_0 - 1 \\ & \Longrightarrow f_{i0} \pi_0 \geqslant (1 + c)^{-1} > 0 \\ & \Longrightarrow \pi_0 > 0 \\ & \Longrightarrow \pi_j > 0, \quad \forall j. \qquad (\text{由不可约性})\square \end{aligned}$$

§1.5 几个典型的离散时间马氏链

本节中, 我们将就几个典型的马氏链讨论其常返性, 遍历性等等. 这些马氏链包括随机游动, 分支过程, 排队论等, 它们都有很强的应用背景.

随机游动

如下给出的 $E = \mathbb{Z}_+$ 上的马氏链 P, 称之为随机游动: $p_{i,i+1} = p_i$, $p_{i+1,i} = q_{i+1}$, $p_{ii} = r_i, i \geqslant 0$ 且 $p_i + q_i + r_i = 1\,(i \geqslant 1)$, $p_0 + r_0 = 1$.

假定 $p_i > 0, r_i \geqslant 0 (i \geqslant 0), q_i > 0 (i \geqslant 1)$. 显然,如 $\forall i \geqslant 0, r_i = 0$, 此过程有周期 2; 否则, 为非周期的. 假定 $r_0 > 0$, 从而过程非周期. 此过程也通常称为半直线上的随机游动. 记

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad i \geqslant 1. \tag{1.35}$$

下面将利用前面几节的结论来给出随机游动的常返性和正常返性的判别准则.

(1) 链常返当且仅当 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{1}{\mu_i p_i} = \infty$;

(2) 链遍历当且仅当

$$\mu := \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i < \infty,$$

此时平稳分布为 $\pi_i = \mu_i / \mu$.

考虑方程 $\sum\limits_{j \geqslant 0} p_{ij} y_j = y_i, \quad i \neq 0$, 即

$$\begin{aligned} &q_1 y_0 + r_1 y_1 + p_1 y_2 = y_1, \\ &q_2 y_1 + r_2 y_2 + p_2 y_3 = y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1.36}$$

应用定理 1.47, 为证明第 (1) 项断言, 只需证明方程 (1.36) 有非常数的有界解当且仅当 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{1}{\mu_i p_i} < \infty$. 以下将证明 $y_0 = 0, y_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{\mu_i p_i}, i \geqslant 1$ 为方程 (1.36) 的非常数的有界解. 事实上, 因为 $r_n = 1 - p_n - q_n$, 容易验证

$$\begin{aligned} q_n y_{n-1} + r_n y_n + p_n y_{n+1} &= q_n \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{\mu_i p_i} + r_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_i p_i} + p_n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\mu_i p_i} \\ &= -\frac{q_n}{\mu_{n-1} p_{n-1}} + \frac{p_n}{\mu_n p_n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_i p_i} = y_n. \end{aligned}$$

现在考虑第 (2) 项断言. 容易验证 $(\mu_i : i \geqslant 0)$ 满足 $\mu_i p_{ij} = \mu_j p_{ji}$, 从而 $\sum\limits_{i \geqslant 0} \mu_i p_{ij} = \mu_j$. 若 $\mu = \sum\limits_{i \geqslant 0} \mu_i < \infty$, 则 $\pi_i = \mu_i / \mu$ 为 P 的平稳分布. 因此随机游动正常返当且仅当

$$\mu < \infty.$$

此时平稳分布为 $\pi_i = \mu_i / \mu$.

排队论

离散时间的排队论的转移矩阵 $P=(p_{ij})$ 如下:

$$p_{ij}=\begin{cases}a_j, & 若\quad i=0;\\ a_{j-i+1}, & 若\quad j\geqslant i-1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 $a_k>0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k=1$. 记 $\rho=\sum\limits_{k=0}^{\infty}ka_k$, $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$, $z\in[0,1]$. 我们将证明链常返当且仅当 $\rho\leqslant 1$; 链正常返 (遍历) 当且仅当 $\rho<1$.

a) 若 $\rho>1$, 我们证明方程 $\sum\limits_{j\geqslant 0}p_{ij}y_j=y_i$, $i\neq 0$ 有非常数有界解. 令 $y_i=c^i$, 由此方程得出 $\sum\limits_{j\geqslant 0}p_{ij}c^j=\sum\limits_{j\geqslant i-1}a_{j-i+1}c^j=c^i$, 即 $c=\sum\limits_{j\geqslant i-1}a_{j-i+1}c^{j-i+1}=\sum\limits_{k\geqslant 0}a_kc^k=:f(c)$. 因为 $f(0)<1=f(1)$ 且 $f'(1)=\rho>1$, 所以由 f 在 $[0,1]$ 上的严格凸性和单调性可知存在 $0<c_0<1$ 使得$f(c_0)=c_0$. 于是 $y_i=c_0^i$ 即为满足方程的非常数有界解.

b) 若 $\rho\leqslant 1$, 取 $y_i=i$, 则对 $i\neq 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{j\geqslant 0}jp_{ij}&=\sum_{j\geqslant i-1}ja_{j-i+1}=\sum_{j\geqslant i-1}(j-i+1)a_{j-i+1}+i-1\\&=\rho-1+i\leqslant i.\end{aligned}$$

由定理 1.35 知链常返.

c) 若 $\rho<1$, 取 $y_i=i/(1-\rho)$, 如上 b) 中所证有

$$\sum_{j\geqslant 0}p_{ij}y_j=y_i-1,\quad i\neq 0.$$

于是由定理 1.36 可知链正常返.

d) 假设链遍历, 即有平稳分布 $(\pi_i:i\geqslant 0)$. 令 $\Pi(z)=\sum\limits_{j\geqslant 0}\pi_jz^j, z\in(0,1)$, 则由 $\pi_j=\sum\limits_i\pi_ip_{ij}=\pi_0a_j+\sum\limits_{i=1}^{j+1}\pi_ia_{j-i+1}$ 得

$$\Pi(z)=\sum_{j\geqslant 0}\pi_0a_jz^j+\sum_{j\geqslant 0}z^j\sum_{i=1}^{j+1}\pi_ia_{j-i+1}=\pi_0f(z)+\frac{1}{z}(\Pi(z)-\pi_0)f(z),$$

即

$$\frac{f(z)-1}{z-1}=1-\pi_0\frac{f(z)}{\Pi(z)}.$$

命 $z\uparrow 1$, 则 $\rho=f'(1)=1-\pi_0<1$.

e) 更进一步, 可得到平稳分布的一个表示, 即

$$\Pi(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)f(z)}{f(z)-z},\quad z\in(0,1).$$

分支过程

设 $\{Y,Y_{n,k}:n,k\geqslant 1\}$ 是取值于 $\mathbb{Z}_+$ 独立同分布序列, $\mathbb{P}[Y=i]=a_i\,(i=0,1,2,\cdots)$. 令

$$X_{n+1}=\sum_{k=1}^{X_n}Y_{n+1,k},\quad n\geqslant 0,$$

则 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是马氏过程, 其转移矩阵 $P=(p_{ij})$ 为

$$p_{ij}=\frac{\partial^j\left[\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right)^i\right]}{j!\,\partial x^j}\Big|_{x=0}.$$

很显然, $p_{00}=1$, 即 0 为吸收点. 问题是 $f_{i0}=$? f_{i0} 称为过程停止分支的概率即所谓灭种概率. 下面将证明:

定理 1.48.

(1) $f_{i0}=(f_{10})^i$;

(2) 令 $G(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_iz^i$, $z\in[0,1)$, 则 f_{10} 是 $z=G(z)$ 的最小正根. 且当 $\rho:=\sum\limits_{k=0}^{\infty}ka_k\leqslant 1$ 时, $f_{10}=1$; 而当 $\rho>1$ 时, $f_{10}\in(0,1)$.

证明 函数 $G(z)$ 即为随机变量 Y 的母函数. 容易证明若随机变量 ξ,η 独立, 则其母函数 G_ξ, G_η 与 $G_{\xi+\eta}$ 有关系: $G_{\xi+\eta}(z)=G_\xi(z)G_\eta(z)$. 设 $X_0=i$, 则有

$$\begin{aligned}G_{i,n+1}(z)&:=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\mathbb{P}_i[X_{n+1}=k]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}_i[X_{n+1}=k|X_n=j]\mathbb{P}_i[X_n=j]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\sum_{m=1}^{j}Y_{n+1,m}=k\right]\mathbb{P}_i[X_n=j]\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_i[X_n = j] \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}\left[\sum_{m=1}^{j} Y_{n+1,m} = k\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_i[X_n = j] G(z)^j = G_{i,n}(G(z)), \quad n \geqslant 1,$$

且 $G_{i,1}(z) = G(z)^i$. 于是由归纳法易得 $G_{1,n+1}(z) = G(G_{1,n}(z))$ 且

$$G_{1,n}(z) = \underbrace{G(G(\cdots(G}_{n\text{ 重}}(z))\cdots)), \quad G_{i,n}(z) = G_{1,n}(z)^i.$$

注意到 $p_{i0}^{(n)} = G_{i,n}(0)$ 及 $f_{i0} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{i0}^{(n)}$, 则有 $f_{i0} = (f_{10})^i$. 故以下假定 $X_0 = 1$. 记 $z_0 = 0, z_n = G(z_{n-1}) = G_{1,n}(0)$, 则 $z_n \uparrow z^* \in [0,1]$ 且 z^* 为满足方程 $z = G(z)$ 的最小非负解. 同时容易看到 $G(z)$ 是单调增的凸函数且 $G(1) = 1$, 故方程 $z = G(z)$ 在 $z \in (0,1]$ 上至多有两个解. 若 $\rho = G'(1) > 1$, 则 $z = G(z)$ 在 $z \in (0,1]$ 上恰有两个解, 于是 $0 < z^* < 1$. 若 $\rho = G'(1) \leqslant 1$, 则 $z = G(z)$ 在 $z \in (0,1]$ 上只有一个解, 即 $z^* = 1$.

而由 z_n 的定义, 可归纳地证明 $z_n = p_{10}^{(n)}$. 事实上,

$$z_0 = 0, \quad z_1 = G(0) = p_{10} = a_0,$$

$$z_n = G(z_{n-1}) = \sum_{k\geqslant 0} a_k \left(p_{10}^{(n-1)}\right)^k = \sum_{k\geqslant 0} p_{1k} p_{k0}^{(n-1)} = p_{10}^{(n)}.$$

因此 $f_{10} = z^*$. □

下面讨论一类扩展的分支过程, 即过程到达 0 以后可以某种概率 p_i 跳到状态 i. 具体而言

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} p_j, & 若 \quad i = 0; \\ p_{ij}, & 若 \quad i \neq 0. \end{cases}$$

定理 1.49.

(1) 扩展分支过程 $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$ 常返当且仅当 $\rho \leqslant 1$;

(2) 假设 $p_i = a_i, i \geqslant 0$. 当 $G'(1) < 1$ 时, 链正常返;

(3) 若平稳分布 $(\pi_i : i \in E)$ 满足 $m := \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\pi_k < \infty$, 则 $\rho < 1$.

证明 (1) 由定理 1.36 的证明过程知链 $\tilde{P}$ 常返当且仅当对链 P, $f_{i0} = 1, \forall i \geqslant 1$. 而这又等价于 $\rho \leqslant 1$.

(2) 注意到对 $i \neq 0$, $\tilde{f}_{i0}^{(n)} = f_{i0}^{(n)}$, 而 $p_{i0}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{i0}^{(n)}$, 则

$$m_{i0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m \geqslant n} f_{i0}^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p_{i0}^{(n-1)}).$$

由命题 1.46 知 $m_{00} < \infty$ 当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p_{i0}^{(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i (1 - p_{i0}^{(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - G(z_{n-1})) < \infty,$$

其中 $z_n = p_{10}^{(n)} \leqslant 1$. 再由 G 在 $(0,1]$ 上的严格凸性, 存在 $\delta < 1$ 使得 $\sup\limits_{z \in [0,1]} G'(z) \leqslant \delta$. 于是

$$1 - G(z) = \int_z^1 G'(z) dz \leqslant \delta (1 - z) \leqslant \delta,$$

$$1 - G(G(z)) = \int_{G(z)}^1 G'(z) dz \leqslant \delta (1 - G(z)) \leqslant \delta^2,$$

$$\cdots\cdots$$

因为 $z_0 = 0, z_{n+1} = G(z_n)$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - G(z_n)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n < \infty.$$

(3) 记 $\Pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$. 则 $\Pi'(1) = m$. 因为 $\pi_j = \sum_i \pi_i \tilde{p}_{ij}$ 且 $G_{i,1}(z) = G(z)^i$, 所以

$$\Pi(z) = \sum_{i,j} \pi_i \tilde{p}_{ij} z^j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} s^j$$

$$= \pi_0 G(z) + \Pi(G(z)) - \pi_0.$$

上式对 z 求导并命 $z \uparrow 1$ 可得

$$\rho = G'(1) = \lim_{z \uparrow 1} \frac{\Pi'(z)}{\pi_0 + \Pi'(z)} = \frac{m}{\pi_0 + m} < 1. \quad \square$$

§1.6　补充与习题

1. 对任意可测集 A, B, C, 有 $\mathbb{P}[BC|A] = \mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[C|AB]$.

2. 定义 1.9 中的马氏性与如下性质等价: 对任意 $r \geqslant 1$, $l_1 < l_2 < \cdots < l_r < m < n$ 及 $i, j, k \in E$, 都有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[X_{l_1} = i_1, \cdots, X_{l_r} = i_r, X_n = k | X_m = j] \\ &= \mathbb{P}[X_{l_1} = i_1, \cdots, X_{l_r} = i_r | X_m = j] \times \mathbb{P}[X_n = k | X_m = j].\end{aligned}$$

3. 马氏链 P 的 n 次幂 $P^n = (p_{ij}^{(n)})$ 是此链的 n 步转移概率: $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i]$.

4. 如果 $p_{jk}^{(n)} > 0$, 则存在 $m \leqslant n$ 使得 $e_{jk}^{(m)} > 0$.
提示: 参照引理 1.12 的证法. 给定 n, 令 $\xi_j = \max\{m \leqslant n : X_m = j\}$.

5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim\limits_{s\uparrow 1}(1-s)P_{ii}(s)$. (Abel 定理)

6. $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为 E 上是马氏链, 设 $\phi : E \to \widetilde{E}$ 的一一映射. 令 $\widetilde{X}_n = \phi(X_n)$, 则 $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 0}$ 是 $\widetilde{E}$ 上的马氏链, 并具有与 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 相同的性质. 若 ϕ 不是一一映射, 情形如何?

7. 定义 $\alpha_{ij} = \mathbb{P}_i[N_j = \infty]$, 其中 $N_j = \#\{n \geqslant 1 : X_n = j\}$ 为马氏链访问 j 的次数, 则

(a) $\alpha_{ii} = 1$ 当且仅当 i 常返;

(b) 当 j 常返, $\alpha_{ij} = f_{ij}$; 当 j 非常返, $\alpha_{ij} = 0$.

提示: 定义 $\alpha_{ij}^{(k)} = \mathbb{P}_i[N_j \geqslant k]$, 并证明 $\alpha_{ij}^{(k)} = f_{ij}\alpha_{jj}^{(k-1)}$.

8. 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 与 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 是两独立的不可约的马氏链, 周期分别为 d_1 和 d_2. 证明当且仅当 d_1 和 d_2 互素时, $(Z_n := (X_n, Y_n))_{n\geqslant 0}$ 是不可约的. 此时具有周期 $d_1 d_2$.

9. (排队论) 设 $\{\xi_n : n \geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbb{Z}_+$ 独立同分布序列, $\mathbb{P}[\xi_n = i] = \mu_i\,(i = 0, 1, 2, \cdots)$. 令 $X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_n$, 则 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为马氏过程, 并写出转移矩阵.

(这是一个离散的排队论模型. ξ_n 表示第 n 时间段来到一个柜台要求服务的顾客数. X_{n+1} 为 $n+1$ 时刻等待服务的顾客数.)

10. (库存模型) 设 $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ 是取值于 $\mathbb{Z}_+$ 独立同分布序列, $\mathbb{P}[\xi_n = i] = \mu_i\,(i = 0, 1, 2, \cdots)$. 固定 $0 < s < S < \infty$, 令

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1}, & \text{若 } s < X_n \leqslant S; \\ S - \xi_{n+1}, & \text{若 } X_n \leqslant s. \end{cases}$$

则 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为马氏过程, 并写出转移矩阵.

(这是一个典型的库存模型. ξ_n 为每天的需求量, (s, S) 为库存策略,即若商

品的库存量 X_n 不多于 s 时,则立即进货到库存量 S; 若商品的库存量多于 s 时,则无需进货.)

11. (基因模型) 假设基因的种类有两种: 一类为 A 型, 另一类为 B 型, 基因的总数是 $2N$. 下一代的基因构成取决于 $2N$ 次独立的二项试验,即上一代包含 i 个 A 型和 $2N-i$ 个 B 型, 那么每次试验的结果是 A 或 B 的概率分别为

$$p_i = \frac{i}{2N}, \quad q_i = 1 - p_i.$$

令 X_n 为第 n 代 A 型基因的个数,则 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为马氏过程, 并写出转移矩阵. 试证明

(a) $0, 2N$ 是两个吸收态;

(b) 当 $0<j<2N$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$; 而 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i0}^{(n)} = 1 - i/2N$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,2N}^{(n)} = i/2N$.

12. (分支过程)设 $\{Y_{n,k} : n, k \geqslant 1\}$ 是取值于 $\mathbb{Z}_+$ 独立同分布序列, $\mathbb{P}[Y_{n,k} = i] = \mu_i, i = 0, 1, 2, \cdots$. 令

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Y_{n+1,k}, \quad X_0 = 1, \quad n \geqslant 0.$$

则 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是马氏过程, 并证明:

(a) 其转移矩阵 $P = (p_{ij})$ 为

$$p_{ij} = \left. \frac{\partial^j \left[\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu_k x^k \right)^i \right]}{j! \partial x^j} \right|_{x=0};$$

(b) 设 $m = \mathbb{E}X_1, \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ (方差), 则 $\mathbb{E}X_n = m^n$,

$$\mathrm{Var} X_n = \begin{cases} \sigma^2 m^{n-1} \dfrac{m^n - 1}{m-1}, & 若 \quad m \neq 1; \\ n\sigma^2, & 若 \quad m = 1. \end{cases}$$

13. (一般状态空间马氏链) 设 $(E, \mathscr{E})$ 是可测空间, $P(x, A)\,(A \in \mathscr{E})$ 为转移概率测度. 若 $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ 随机过程满足如下的马氏性:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} \in A | X_n = x] = P(x, A).$$

则称 X 为 E 上的离散时间的马氏过程. 试写出 $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ 的联合分布.

14. 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为 $\mathbb{N}$ 上的不可约的, 非周期的马氏链. 证明链非常返当且仅当对任意的初始分布, 都有 $X_n \to \infty$ a.s.; 链零常返当且仅当上式依概率而非 a.s. 的意义下成立.

15. 证明推论1.19.

16. (古典耦合) 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 与 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 是两个不可约的非周期的马氏链. 定义耦合时间

$$\tau(\omega) = \inf\{n \geqslant 0 : X_n(\omega) = Y_n(\omega)\}.$$

构造耦合过程 Z_n 如下:

$$Z_n(\omega) = \begin{cases} (X_n, Y_n)(\omega), & \text{如 } n < \tau(\omega); \\ (X_n, X_n)(\omega), & \text{如 } n \geqslant \tau(\omega). \end{cases}$$

证明耦合过程 $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ 为马氏链, 并讨论其不可约性和周期性. 更进一步, 如 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 与 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ (正) 常返, $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ 是否 (正) 常返?

17. 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是常返的马氏链, 且 $X_0 = i$. 考虑 i 的相继的返回时间间隔:

$$\tau_1 = \inf\{n > 0 : X_n = i\}, \quad \tau_{k+1} = \inf\{n > \tau_k : X_n = i\} - \tau_k, k \geqslant 1.$$

(a) 证明 $\tau_k, k \geqslant 1$ 独立同分布.

(b) 令 $Y_n = X_{n+\tau_1}$, 则 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 是时齐的马氏链, 且与 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 有相同的转移矩阵.

18. (双随机阵) 设 $P = (p_{ij})$ 为有限的不可约双随机阵, 即 $\sum\limits_{i=1} p_{ij} = 1, j = 1, \cdots, m$. 证明此马氏链的平稳分布为 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 上的均匀分布.

19. (对偶过程) 设 P 为马氏链, μ 为其不变测度. 定义 $\bar{p}_{ij} = \mu_j p_{ij}/\mu_i$. 证明 $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$ 是马氏链. $\bar{P}$ 称为 P 的对偶过程. 并由此证明

(a) 马氏链 P 不可约当且仅当其对偶过程 $\bar{P}$ 不可约;

(b) 马氏链 P 常返当且仅当其对偶过程 $\bar{P}$ 常返;

(c) 马氏链 P 正常返当且仅当其对偶过程 $\bar{P}$ 正常返.

20. (可逆性) 马氏链 X_n 称为可逆的,如果对任意的时刻 $n, m \geqslant 0$ 及状态 $i, j \in E$, 都有

$$\mathbb{P}[X_n = i, X_m = j] = \mathbb{P}[X_n = j, X_m = i]. \tag{1.37}$$

(a) (1.37) 等价于对任意的时刻 $n_1, \cdots, n_m$ 及状态 $i_1, \cdots, i_m \in E$,

$$\mathbb{P}[X_{n_1} = i_1, \cdots, X_{n_m} = i_m] = \mathbb{P}[X_{n_1} = i_m, \cdots, X_{n_m} = i_1].$$

(b) 马氏链可逆当且仅当存在平稳分布 (π_i) 使得 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$.

21. 设转移矩阵 P 的第一列为 $\{q_0, q_1, \cdots\}$ 且 $p_{i,i+1} = 1 - q_i, i = 0, 1, \cdots$. 此链何时不可约? 并证明如果此链不可约, 则链常返当且仅当 $\sum_i q_i = \infty$. 更进一步, 此链何时零常返? 何时正常返?

22. 设转移矩阵 P 的第一行为 $\{q_0, q_1, \cdots\}$ 且 $p_{i,i-1} = 1, i = 0, 1, \cdots$. 其中 $q_i > 0, \sum_i q_i = 1$. 证明此链不可约且常返. 讨论此链何时零常返? 何时正常返?

23. 考虑 $\mathbb{Z}_+$ 上的马氏链, 其转移矩阵为 $p_{0i} = a_i, p_{i0} = 1$, 其中 $a_i > 0, \sum_i a_i = 1$. 讨论此链的周期性、常返性与正常返性.

24. 如正整数 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 有最大公因子 d, 则存在正整数 N, 使得当 $n > N$时, 有非负整数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 使得 $nd = \sum_{i=1}^{m} c_i s_i$.
提示: 存在 $n_1, \cdots, n_m$ 使得 $d = n_1 s_1 + \cdots + n_m s_m$, 令 $q = \sum_{n_i > 0} n_i s_i, r = \sum_{n_i < 0} n_i s_i$, 则 $q = r + d$. 若 $r \neq 0$, 取 $N = (r/d)^2$ 即可.

25. 设马氏过程 P 具有平稳分布 π. 证明初始分布 (即 X_0 的分布) 为 π, 则对任意 $n > 0$, X_n 的分布都是 π. 这也是称之为平稳分布的原因.

26. 有限状态空间的马氏链至少有一个常返状态, 且不可能有零常返状态. 进而不可约的有限状态空间的马氏链必定正常返.

27. 设马氏链的状态空间 C 为不可约闭集, 则 C 可分成 d 个不交集:

$$C = \sum_{m=1}^{d} G_m.$$

从任一 G_m 中的状态出发, 下一步转移必定落入 $G_{m+1(\mathrm{mod}\, d)}$.
提示: 可先固定一个状态 i, 使用命题 1.27, 令

$$G_r = \{j \in C : 存在\ m \geqslant 0,\ 使得\ p_{ij}^{(md+r)} > 0\},$$

则 $C = \sum_{m=1}^{d} G_m$ 且 $G_r \cap G_s = \varnothing\, (r \neq s)$; 然后再证明所得的分解与预先固定的状态 i 无关.

28. 讨论如下马氏链的状态分类及其极限分布:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

29. 令

$$P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix},\quad 0<a,b<1.$$

证明

$$P^n=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b\ a\\ b\ a\end{pmatrix}+\frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}.$$

30. 讨论以下几个马氏链的常返与正常返.

(a) 考虑直线 $\mathbb{Z}$ 上的随机游动, 即 $p_{i,i+1}=p, p_{i,i-1}=1-p(0<p<1)$ i 为整数. 当 $p=1/2$ 时, 称为对称随机游动. 试确定 $p_{00}^{(n)}$.

(b) 考虑半直线 $\mathbb{Z}_+$ 上的随机游动, 即 $p_{00}=1-p, p_{i,i+1}=p\ (i\geqslant 0), p_{i,i-1}=1-p\ (i\geqslant 1)$.

(c) 考虑直线 $\mathbb{Z}$ 上的马氏链: $p_{i,i+2}=p, p_{i,i-1}=1-p(0<p<1)$, i 为整数.

31. (a) 考虑二维的对称随机游动, 即

$$p_{(i,j),(i+1,j)}=p_{(i,j),(i-1,j)}=p_{(i,j),(i,j+1)}=p_{(i,j),(i,j-1)}=1/4,$$

则此过程是两个一维的对称随机游动的独立耦合, 从而此过程是常返的.

(b) 对三维空间中的对称随机游动 (即从一点向六个紧邻点运动的概率都是 1/6), 结论如何?

32. 考虑如下的马氏链:

$$P=\begin{pmatrix}p_0\ p_1\ p_2\cdots & p_m\\ p_m\ p_0\ p_1\cdots & p_{m-1}\\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots & \vdots\\ p_1\ p_2\ p_3\cdots & p_0\end{pmatrix},$$

其中 $0<p_0<1, p_0+p_1+\cdots+p_m=1$. 试确定其平稳分布 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}$.

33. 运用第一迭代法证明命题 1.45 和 1.46.

34. 证明定理 1.43 中第二迭代法得到最小非负解与第一迭代法得到的一致.

35. 记 $m_{ij} = \mathbb{E}_i\tau_j^+$. 固定 $j \in E$, 给出如下方程的非负最小解, 并说明其概率含义.

$$x_i = \sum_{k\neq j} p_{ik}x_k + m_{ij}.$$

36. 设 P 不可约. 固定 $j \in E$, 则 P 常返当且仅当方程

$$x_i = \sum_{k\neq j} p_{ik}x_k + p_{ij}$$

的最小解 $x_i^* = 1, \forall i \in E$.

37. 设 $\widetilde{P}$ 由定理 1.35 的证明中所定义, 则

(a) 对马氏链 P 和 $\widetilde{P}$, $i \neq 0, f_{i0} = \widetilde{f}_{i0}$ 且 $\widetilde{p}_{i0}^{(n)} = \sum\limits_{m=1}^{n} f_{i0}^{(m)}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\eta}_i(n) \leqslant \mathbb{P}_i[\limsup\limits_{m\to\infty} \widetilde{X}_m = \infty] \leqslant 1 - f_{i0}$. 从而若 P 常返, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\eta}_i(n) = 0$.

38. 设 P 是有限状态空间上的遍历的马氏链, 其遍历测度为 $(\pi_i : i \in E)$. 记 $D = (d_{ij})$ 为 $d_{ij} = \sum\limits_{n\geqslant 0}(p_{ij}^{(n)} - \pi_j)$, 则

(a) D 存在且有限, 且 $d_{ii} = \hat{m}_{ii}/m_{ii}^2$, 对 $i \neq j$, $d_{ij} = d_{jj} - \pi_j m_{ij}$, 这里 $\hat{m}_{ii} = \dfrac{1}{2}(\mathbb{E}[\tau_i^+]^2 - \mathbb{E}\tau_i^+)$;

(b) $\sum\limits_j d_{ij} = 0$ 且 $\mathrm{tr}(D) = \sum\limits_{j\neq i} \pi_j m_{ij} = \sum\limits_{i\neq j} \pi_i\pi_j m_{ij}$.

39. 设 P为有限状态空间上的遍历马氏链, $\bar{P}$ 为其对偶过程 (见习题 19), 则 $m_{ii} = \bar{m}_{ii}$ 且 $\mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(\bar{D})$. (带 "¯" 的对应于过程 $\bar{P}$.)

40. 依照第五节中第一款的方法, 讨论状态空间为 $\mathbb{Z}$ 上的随机游动的常返性和遍历性. 即设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为直线上的随机游动, 具有如下定义的转移矩阵 $P = (p_{ij})$. 对 $i \in \mathbb{Z}$, $p_{i,i+1} = p_i, p_{i,i-1} = q_i, p_{ii} = r_i$ 且 $p_i + q_i + r_i = 1$. 假定 $p_i > 0, r_i \geqslant 0, q_i > 0$. 显然, 如 $\forall i, r_i = 0$, 此过程有周期 2; 否则, 为非周期的. 假定 $r_0 > 0$, 从而过程非周期. 试讨论其常返性与遍历性.

41. 在排队论中, 假设单位时间来到的顾客人数分别服从 Poisson 分布和几何分布, 试分别讨论相应过程的常返性与遍历性, 并在遍历的前提下, 求出平稳分布.

42. (排队论的对偶) 设 $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ 是取值于 $\mathbb{Z}_+$ 独立同分布随机变量序列, $\mathbb{P}[\xi_n = i] = \mu_i \, (i = 0, 1, 2, \cdots)$. 令 $X_{n+1} = (X_n + 1 - \xi_n)^+, n \geqslant 1$, 则

(a) $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为马氏过程, 并写出转移矩阵;

(b) 记 $\rho = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\mu_k$, 则链常返当且仅当 $\rho \geqslant 1$, 而链遍历当且仅当 $\rho > 1$;

(c) 在遍历的条件下如何得到平稳分布?

(这是排队论的对偶. 其含义是单位时间来的顾客数为 1, 而可以提供服务的服务员人数是随机的, 即 ξ_n 表示第 n 时间段服务员数. X_{n+1}为 $n+1$ 时刻等待服务的顾客数.)

43. 马氏链的转移矩阵 $P = (p_{ij})$ 如下:

$$p_{ij} = \begin{cases} b_j, & \text{若} \quad i = 0; \\ a_{j-i+1}, & \text{若} \quad j \geqslant i - 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $a_k > 0, b_k > 0, \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 1, \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = 1$. 讨论马氏链 P 的常返性和遍历性.

44. (分支过程续)

(a) 用概率方法直接证明 $f_{i0} = [f_{10}]^i$.

提示: 由独立性及 f_{i0} 的定义可知$f_{i0} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{i0}^{(n)}$.

(b) 在分支过程中, 若 $\rho = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k > 1$, 讨论当 $n \to \infty$ 时, X_n 的行为.

(c) 在扩展的分支过程中, 记 $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k, z \in [0, 1]$. 若 $P'(1) < \infty$ 且 $\rho < 1$, 则如何得到平稳分布?

45. 设 P 为转移矩阵, 定义

$$V(P) = \frac{1}{2} \sup_{i,j} \sum_k |p_{ik} - p_{jk}|;$$

证明:

$$V(P^{n+m}) \leqslant V(P^n) V(P^m).$$

利用题 16 所定义的 τ 证明

$$V(P^n) \leqslant \sup_{ij} \mathbb{P}_{ij}[\tau > n].$$

从而若

$$\sup_{ij}\mathbb{E}_{ij}\tau<\infty,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}V(P^n)=0$.

46. 设 P 为有限状态空间 $\{1,2,\cdots,N\}$ 上的对称的马氏链, 即 $p_{ij}=p_{ji}$.

(a) 给定 $1\leqslant i\leqslant N$, 定义

$$E_i(n)=\sum_j p_{ij}^{(n)}\log p_{ij}^{(n)}, \tag{1.38}$$

证明 $E_i(n)$ 是关于 $n\geqslant 0$ 的非增函数. 更进一步地, 存在 $C<\infty$ 和 $\alpha<1$ 使得

$$\log n+E_i(n)\leqslant C\alpha^n.$$

(b) 对函数 ψ, 类似于 (1.38) 定义

$$\Psi_i(n)=\sum_j\psi(p_{ij}^{(n)}).$$

讨论什么样的函数 ψ 使得 $\Psi_i(n)$ 具有 (a) 中的单调性和收敛性.

47. 对于有限不可约非周期的马氏链, 证明:

(a) 存在 n 使得对所有 i,j, $p_{ij}^{(n)}>0$;

(b) 存在 $C<\infty$ 和 $\rho<1$,使得对任意的 i,j,

$$|p_{ij}^{(n)}-\pi_j|\leqslant C\rho^n,\quad n\geqslant 0.$$

第二章　连续时间马氏链

§2.1　连续时间参数马氏链　唯一性

定义 2.1. 设 E 可数. 称 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为**马氏链**, 若对一切 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in E$, 下述**马氏性**成立:

$$\mathbb{P}\big[X_{t_n}=i_n|X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\big]=\mathbb{P}\big[X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\big].$$

此链称为**时齐的**, 如果

$$\mathbb{P}[X_t=j|X_s=i]=\mathbb{P}[X_{t-s}=j|X_0=i]=:p_{ij}(t-s).$$

此时, 记 $P(t)=(p_{ij}(t))$, 并称之为**转移概率矩阵**. 显然, 它具有如下性质:

(1)　非负性　$P(t)\geqslant 0,\quad t\geqslant 0$;

(2)　范条件　$P(t)1=1$, 即 $\sum\limits_j p_{ij}(t)=1,\quad t\geqslant 0$;

(3)　C-K 条件 (Chapman-Kolmogorov 方程)　$P(t+s)=P(t)P(s)$; (对应于马氏性)

(4)　连续性条件 (跳条件)　$\lim\limits_{t\to 0}P(t)=I=(\delta_{ij})$.

1936年, A. N. Kolmogorov 证明了如下结果:

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=:q_i\in[0,\infty],\qquad \lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}=:q_{ij}\in[0,\infty),\quad j\neq i,\tag{2.1}$$

而且 $\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}\leqslant q_i$. 如已知极限存在, 则后一结果是下式

$$\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t}=\frac{1-p_{ii}(t)}{t}$$

及 Fatou 引理的简单推论. 极限的存在性远非平凡. 因为上面的 (4) 只假定了连续性, 为导出零点的可微性自然不够, 需要用到其余性质. 例如第一个极限的存在性使用了次可加函数的性质.

记 $Q = (q_{ij})$, 并称之为 Q **矩阵**. 留心 q_i 可以为 ∞, 而且可能出现 $\sum_{j\neq i} q_{ij} < q_i$. 这些情况在数学上产生诸多困难. 好在实际应用中所需的几乎都用不着这么复杂.

定义 2.2. 称 Q 矩阵

全稳定: 如对一切 i, $q_i < \infty$;

保守: 如对一切 i, $\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i \Longleftrightarrow \sum_j q_{ij} = 0, q_{ii} := -q_i$.

对于全稳定情形, 由条件 (4) 可推出过程的轨道必定是 (右连续的) 阶梯函数. 因而我们也称之为跳条件.

定理 2.3 (Q 矩阵的概率意义).

(1) $\mathbb{P}_i[X_s = i, 0 \leqslant s \leqslant t] = e^{-q_i t}$. 从而, 若 $q_i = 0$, 则 $\mathbb{P}_i[X_s = i, \forall\, s \geqslant 0] = 1$, 即 i 为吸收态.

(2) 设 $q_i \in (0, \infty)$, 则 $\mathbb{P}_i[X_{\tau_1} = j] = q_{ij}/q_i (j \neq i)$. 此处 τ_1 为 (X_t) 的第一次跳: $\tau_1 = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \neq X_0\}$.

证明 (1) 由过程的轨道的右连续性和马氏性, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i[X_s = i, 0 \leqslant s \leqslant t] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i[X_{kt/2^n} = i, k = 0, 1, \cdots, 2^n] \\
&= \lim_{n\to\infty} p_{ii}(t/2^n)^{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{q_i t}{2^n} + o(2^{-n})\right)^{2^n} \qquad (\text{由 } (2.1)) \\
&= e^{-q_i t}.
\end{aligned}$$

(2) 设 $i \neq j$, 令

$$R_{ij}(h) = \mathbb{P}[X_{t+h} = j | X_t = i, X_{t+h} \neq i],$$

则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i[X_{\tau_1} = j] = \lim_{h\to 0} R_{ij}(h) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}[X_{t+h} = j | X_t = i]}{\mathbb{P}[X_{t+h} \neq i | X_t = i]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(h)/h}{(1 - p_{ii}(h))/h} \\
&= \frac{q_{ij}}{q_i}. \qquad \square
\end{aligned}$$

以下是连续时间马氏链的样本轨道示意图.

从现在开始, 我们总假定所给定的 Q 矩阵全稳定且保守.

由 C-K 方程 $P(t+s)=P(t)P(s)$ 出发, 分别关于 t 和 s 在零点取导数, 形式上可导出两个微分方程 (Kolmogorov (1931)):

柯氏向后方程 $$P'(t)=QP(t), \tag{2.2}$$

柯氏向前方程 $$P'(t)=P(t)Q. \tag{2.3}$$

两个方程都是无穷维微分方程组. 类似于微分方程, 在实际中, 我们知道的是 Q 而非 $P(t)$.

定义 2.4. 称满足定义 2.1 中的条件 (1), (3), (4) 及 $P(t)1\leqslant 1$ 的 $P(t)$ 为 Q 过程, 倘若 $P'(t)|_{t=0}=Q$.

现在, 自然要问对于给定矩阵 Q, Q 过程是否存在? 是否唯一? 首先, 回顾全稳定、保守的假设, 因而有

定理 2.5. 每一 Q 过程都满足向后方程.

此定理的证明不算太难. 由此出发, Q 过程的存在、唯一性就化为向后方程的解的存在、唯一性. 然而, 并非 Q 过程均满足向前方程. 换言之, 两个方程的地位并不平等. 在进一步深入之前, 我们说明这两个方程的等价积分形式.

向后方程 $$p_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}\int_0^t q_{ik}e^{-q_i(t-s)}p_{kj}(s)\mathrm{d}s+\delta_{ij}e^{-q_it}, \tag{2.4}$$

向前方程 $$p_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}\int_0^t p_{ik}(s)q_{kj}e^{-q_j(t-s)}\mathrm{d}s+\delta_{ij}e^{-q_jt}. \tag{2.5}$$

这两个积分方程都有很好的概率意义. 前者是关于过程 "第一次跳的分解", 而后者则是关于 "t 之前最后一次跳的分解". 今详述之.

首先, $e^{-q_i t} = \mathbb{P}_i[X_s$ 在 $[0,t]$ 内不跳]. 如 $q_i \neq 0$, 则在 $[0,t]$ 内必有跳,

$$p_{ij}(t) = \int_0^t q_i e^{-q_i s} \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{q_i} p_{kj}(t-s)\mathrm{d}s,$$

其中 $q_i e^{-q_i s}$ 为在 $[0,t]$ 内不跳的概率密度, q_{ik}/q_i 为从 i 跳至 k 的概率; $p_{kj}(t-s)$ 表示从 k 出发、再经过 $t-s$ 长的时间到达 j. 把 $t-s$ 换成 s 即得前一方程.

其次, 依然设 $i \neq j$, 则

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= \sum_{k \neq j} \int_0^t \mathbb{P}_i[X_s = k, X_{s+\mathrm{d}s} = j,\ \text{在}\ [s+\mathrm{d}s, t]\ \text{内无跳}] \\
&= \sum_{k \neq j} \int_0^t \mathbb{P}_i[\text{在}\ [s+\mathrm{d}s, t]\ \text{内无跳} | X_s = k, X_{s+\mathrm{d}s} = j] \\
&\quad \cdot \mathbb{P}_i[X_{s+\mathrm{d}s} = j | X_s = k] \cdot \mathbb{P}_i[X_s = k] \\
&= \sum_{k \neq j} \int_0^t e^{-q_j(t-s)} p_{kj}(\mathrm{d}s) p_{ik}(s) \\
&= \sum_{k \neq j} \int_0^t e^{-q_j(t-s)} q_{kj} p_{ik}(s)\mathrm{d}s. \quad (\text{因为}\ p_{kj}(\mathrm{d}s) = q_{kj}\mathrm{d}s)
\end{aligned}$$

由此导出积分形式的向前方程.

现在, 我们可以陈述第一个主要结果.

定理 2.6 ([19]). *Q 过程总存在. 事实上, 向后、向前方程有相同的最小解 $P^{\min}(t)$. 从而任一 Q 过程 $P(t) \geqslant P^{\min}(t)$, 即 $p_{ij}(t) \geqslant p_{ij}^{\min}(t)$.*

事实上, 依据第一迭代法, 命

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(0)}(t) &= 0, \\
p_{ij}^{(n+1)}(t) &= \sum_{k \neq i} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} p_{kj}^{(n)}(s)\mathrm{d}s + \delta_{ij} e^{-q_i t}, \qquad n \geqslant 0,
\end{aligned}$$

则 $p_{ij}^{(n)}(t) \uparrow p_{ij}^{\min}(t)$.

在 Q 过程研究中, 常使用一种更为简单的方法, 即采用拉氏变换 (如同常微分方程), 称之为预解式. 命 $p_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{ij}(t)\mathrm{d}t,\quad \lambda > 0$. 此时, $P(t)$ 的四个条件分别转化为如下五个条件:

(1) 非负性 $P(\lambda) \geqslant 0$;

(2) 范条件 $\lambda P(\lambda)1 \leqslant 1$;

(3) 预解条件 $P(\lambda) - P(\mu) + (\lambda - \mu)P(\lambda)P(\mu) = 0$;

(4) 跳条件 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(\lambda P(\lambda)-I)=0$;

(5) Q 条件 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda P(\lambda)-I)=Q$.

进一步, 两个积分方程分别化成以下代数方程

向后方程 $$p_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}p_{kj}(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i},\tag{2.6}$$

向前方程 $$p_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq j}p_{ik}(\lambda)\frac{q_{kj}}{\lambda+q_j}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_j}.\tag{2.7}$$

关于这两个方程, 也得出相同的最小解 $P^{\min}(\lambda)$, 而且任一 Q 过程必定满足 $P(\lambda)\geqslant P^{\min}(\lambda)$.

现在, 得出

$$0\leqslant p_{ij}(\lambda)-p_{ij}^{\min}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}[p_{kj}(\lambda)-p_{kj}^{\min}(\lambda)].$$

如果 Q 过程不唯一, 则方程

$$u_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_k$$

必定有非零、非负有界解. 即方程

$$\begin{cases}(\lambda+q_i)u_i=\sum\limits_{k\neq i}q_{ik}u_k,\\ 0\leqslant u_i\leqslant 1\end{cases}\tag{2.8}$$

必定有非平凡解. 由此不难理解以下的唯一性准则:

定理 2.7 ([20, 51]). Q 过程唯一的充要条件是对于某 (等价地, 一切) $\lambda>0$, 方程 (2.8) 只有零解.

此定理证明的难点自然是必要性. 即 (2.8) 有非零解时, 构造出异于 $P^{\min}(\lambda)$ 的 Q 过程

$$P(\lambda)=P^{\min}(\lambda)+\,?$$

事实上可构造出无穷多. 因而非唯一时必定有无穷多个 Q 过程, 这也反过来体现出唯一性的重要地位.

此唯一性准则自然有很多应用. 最简单的情形如次.

推论 2.8. 如 $M:=\sup\limits_i q_i<\infty$, 则 Q 过程唯一.

证明 设 u_i 为方程 (2.8) 的任一解. 记 $\bar{u}=\sup\limits_i u_i \leqslant 1$. 如 $\bar{u}>0$, 则

$$\begin{aligned}\bar{u}=\sup_i u_i &= \sup_i \sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_k \leqslant \left(\sup_i \sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\right)\bar{u}\\ &=\bar{u}\sup_i\frac{q_i}{\lambda+q_i}\leqslant \bar{u}\frac{M}{\lambda+M}<\bar{u},\end{aligned}$$

矛盾. □

定理 2.7 的最好的应用是所谓单生过程, 留待以后再作讨论. 此定理的优美之处是 Q 矩阵, 而且方程 (2.8) 的最大解也存在迭代算法. 然而, 在应用中它远非想象的那么好. 事实上, 对于多维情形, 方程 (2.8) 几乎是不可解的. 曾有一些统计物理模型, 我们历经多年才找到解答. 下面是一种简单实用的唯一性充分条件.

定理 2.9 ([4]). 假定存在序列 $\{E_n\}$, $E_n\subset E$, 和函数 $\phi\geqslant 0$ 满足

(1) $E_n\uparrow E$, $\sup\limits_{i\in E_n} q_i<\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{i\notin E_n}\phi_i=\infty$;

(2) 存在 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $\sum\limits_j q_{ij}(\phi_j-\phi_i)\leqslant c\phi_i$, $i\in E$,

则 Q 过程唯一.

通常取 $\{E_n\}$ 为有限集序列. 本质条件是 (2).

证明 a) 取

$$q_{ij}^{(n)}=q_{ij}I_{E_n}(i),\quad i\neq j;\qquad q_i^{(n)}=\sum_{j\neq i}q_{ij}^{(n)}.$$

则由 (1) 知 $\sup\limits_i q_i^{(n)}<\infty$, 从而唯一决定 Q 过程 $P_n(\lambda)=(p_{ij}^{(n)}(\lambda))$. 其次, 以 $c^+=c\vee 0$ 代替 c, 条件 (2) 对于 $Q_n=(q_{ij}^{(n)})$ 满足. 由于 $(p_{ij}^{(n)}(\lambda): i\in E)$ 是向后方程

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda+q_i^{(n)}}x_k+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i^{(n)}},\quad i\in E$$

的最小解, 由线性组合定理知 $\left(\sum\limits_j p_{ij}^{(n)}(\lambda)\phi_j: i\in E\right)$ 是方程

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda+q_i^{(n)}}x_k+\frac{\phi_i}{\lambda+q_i^{(n)}}$$

的最小解. 由条件 (2) 知

$$\frac{\phi_i}{\lambda-c^+}\geqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda+q_i^{(n)}}\cdot\frac{\phi_k}{\lambda-c^+}+\frac{\phi_i}{\lambda+q_i^{(n)}},\quad \lambda>c^+$$

$$\Longleftrightarrow(\lambda+q_i^{(n)})\phi_i\geqslant\sum_{k\neq i}q_{ik}^{(n)}\phi_k+\phi_i(\lambda-c^+).$$

故由比较定理知

$$\sum_j p_{ij}^{(n)}(\lambda)\phi_j\leqslant\frac{\phi_i}{\lambda-c^+}<\infty,\qquad \lambda>c^+.$$

b) 当 $i\in E_n$ 时, 对于一切 $A\subset E_n$, 有

$$p_{iA}^{\min}(\lambda):=\sum_{j\in A}p_{ij}^{\min}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}p_{kA}^{\min}(\lambda)+\frac{\delta_{iA}}{\lambda+q_i}$$

$$=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda+q_i^{(n)}}p_{iA}^{\min}(\lambda)+\frac{\delta_{iA}}{\lambda+q_i^{(n)}}.$$

而当 $i\notin E_n$ 时,

$$p_{iA}^{\min}(\lambda)\geqslant 0=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda+q_i^{(n)}}p_{kA}^{(n)}(\lambda)+\frac{\delta_{iA}}{\lambda+q_i^{(n)}},\qquad A\subset E_n.$$

故由比较定理知

$$p_{iA}^{\min}(\lambda)\geqslant p_{iA}^{(n)}(\lambda),\qquad i\in E,\ A\subset E_n.$$

c) 最后,

$$\lambda p_{iE_n}^{\min}(\lambda)\geqslant\lambda p_{iE_n}^{(n)}(\lambda)=1-\lambda p_{iE_n^c}^{(n)}(\lambda)\quad(\text{因 }(p_{ij}^{(n)}(\lambda))\text{ 不中断})$$

$$\geqslant 1-\lambda\sum_{j\notin E_n}p_{ij}^{(n)}(\lambda)\phi_j\Big/\inf_{i\notin E_n}\phi_i$$

$$\geqslant 1-\frac{\lambda\phi_i}{\inf_{i\notin E_n}\phi_i}\cdot\frac{1}{\lambda-c_+},\qquad \lambda>c_+.$$

命 $n\to\infty$ 得出 $\lambda p_{iE}^{\min}(\lambda)\geqslant 1$.

设 $(P_{ij}(\lambda))$ 为向后方程的任一解, 则由最小性及范条件知 $1\leqslant\lambda p_{iE}^{\min}(\lambda)\leqslant\lambda p_{iE}(\lambda)=1$, 从而必有 $P_{ij}(\lambda)=P_{ij}^{\min}(\lambda),\forall\, i,j\in E$, 即证得唯一性. □

§2.2 常返性与遍历性

在解决了 Q 过程的唯一性问题之后, 下一步的任务就是常返性与遍历性问题了.

首先, 需要解决状态的分类问题. 对于连续时间情形, 可以证明

$p_{ii}(t) > 0, \quad \forall t \geqslant 0;$ (易证)

$p_{ij}(t)$ 关于 t 在 $(0, \infty)$ 上或恒为正或恒为零. (难证)

因而不存在周期问题.

命题 2.10. $(p_{ij}(t))$ 不可约 $\Longleftrightarrow Q = (q_{ij})$ 不可约.

以下限于不可约情形, 且总假定 Q **正则** (**规则**), 即全稳定、保守且 Q 过程唯一.

定义 2.11.

(1) 称 $P(t)$ **常返**, 若对一切 $h > 0$, 离散链 $P(h)$ 常返 $\Longleftrightarrow \int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t = \infty$.

(2) 称 $P(t)$ **遍历**, 若对一切 $h > 0$, 离散链 $P(h)$ 遍历 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} p_{jj}(t) = \pi_j > 0$.

对于连续时间情形, 常返性比较容易处理. 事实上, 可归结为离散时间情形. 设 $q_i > 0, \ \forall i$. 命

$$\tilde{p}_{ij} = q_{ij}/q_i, \ \ j \neq i; \qquad \tilde{p}_{ii} = 0, \quad i, j \in E,$$

则 $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$ 是一转移概率矩阵, 以 $\tilde{P}$ 为转移概率的离散时间马氏链称为**嵌入链**或**跳跃链**. 称为跳跃链的原因如下. 命 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ 依次为跳跃的时刻, 即 $\tau_1 = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \neq X_0\}$ 为第一次跳跃的时刻, $\cdots, \tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1} : X_t \neq X_{t-}\}$ 为第 n 次跳跃的时刻. 定义 $Y_n = X_{\tau_n}$, 易知 (Y_n) 是以 $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$ 为转移矩阵的离散时间的马氏链.

定理 2.12 ([5]).

$$\int_0^\infty p_{ij}^{\min}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \tilde{p}_{ij}^{(n)}/q_j. \tag{2.9}$$

这样, 由唯一性,

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{q_i}\sum_{n=0}^\infty \tilde{p}_{ii}^{(n)}. \tag{2.10}$$

证明　由于 $(p_{ij}^{\min}(\lambda) : i \in E)$ 对于固定的 j 是方程

$$x_i = \sum_{k\neq i} q_{ik}x_k/(\lambda + q_i) + \delta_{ij}/(\lambda + q_i), \qquad i \in E$$

的最小解, 使用第二迭代法, 得出

$$p_{ij}^{\min}(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \overline{Q(\lambda)}^n(i,j)/(\lambda + q_j),$$

其中 $\overline{Q(\lambda)}^n$ 为下述矩阵的 n 次幂:

$$\bar{q}_{ij}(\lambda) = q_{ij}/(\lambda + q_i), \quad i \neq j; \quad \bar{q}_{ii}(\lambda) = 0, \quad i, j \in E.$$

命 $\lambda \to 0$, 由单调收敛定理得

$$\int_0^\infty p_{ij}^{\min}(t)\mathrm{d}t = \lim_{\lambda \to 0} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \delta_{ij}/q_i + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{ij}^{(n)}/q_j.$$

由此导出所需断言. □

可惜, 关于正常返性, 这种等价性不再保持, 而且不可比较. 试想想其中的道理! 当利用离散链 $P(h)$ 容易得到以下的结论.

定理 2.13.

(1) 极限 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$ 与 i 无关.

(2) 过程正常返当且仅当如下方程解唯一:

$$\pi_i > 0, \quad \sum_i \pi_i = 1, \quad \sum_i \pi_i q_{ij} = 0, \quad i, j \in E.$$

然而, 我们依然有类似于离散时间情形的判别法.

定理 2.14 ([52, 29, 58]). 设 Q 正则, 不可约. H 为 E 的非空有限子集. 则此链遍历当且仅当不等式

$$\begin{cases} \sum_j q_{ij} y_j \leqslant -1, & i \notin H, \\ \sum_{i \in H} \sum_{j \neq i} q_{ij} y_j < \infty \end{cases} \tag{2.11}$$

有有限非负解.

称链**指数遍历**, 如果存在常数 $\alpha > 0$ 及 $c_{ij} < \infty$, 使得 $|p_{ij}(t) - \pi_j| \leqslant c_{ij} e^{-\alpha t}$ 对于一切 $i, j \in E$ 和 $t \geqslant 0$ 都成立. 最佳 (即最大) 的 α 称为指数遍历速度.

定理 2.15 ([58]). 设 Q 和 H 同上, 则此链指数遍历当且仅当对某 $\lambda > 0$, $\lambda < q_i\,(\forall i)$, 不等式

$$\begin{cases} \sum_j q_{ij} y_j \leqslant -\lambda y_i - 1, & i \notin H, \\ \sum_{i \in H} \sum_{j \neq i} q_{ij} y_j < \infty \end{cases} \tag{2.12}$$

有有限非负解.

这些定理的证明的关键在于建立一些递推关系. 类似于离散时间情形的 f_{ij} 和 m_{ij}, 我们定义

$$\begin{aligned}
&\sigma_H = \inf\{t \geqslant \tau_1 : X_t \in H\},\\
&f_{iH}^{(n)}(t) = \mathbb{P}_i[\sigma_H = \tau_n > t],\\
&f_{iH}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{iH}^{(n)}(t),\\
&f_{iH}^{(n)} = f_{iH}^{(n)}(0), \quad f_{iH} = f_{iH}(0).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

引理 2.16. 命 $\bar{p}_{ik} = \dfrac{q_{ik}}{q_i}$, $\bar{p}_{iH} = \sum\limits_{j\in H} \bar{p}_{ij}$, 则 $f_{iH}^{(1)} = \bar{p}_{iH}$, $f_{iH}^{(n+1)} = \sum\limits_{k\notin H} \bar{p}_{ik} f_{kH}^{(n)}$. 进而 $(f_{iH}:\ i \in E)$ 是方程

$$x_i = \sum_{k\notin H} \bar{p}_{ik} x_k + \bar{p}_{iH} \tag{2.14}$$

的最小解. 若 H 非空有限, 则此马氏链常返当且仅当对于一切 i, $f_{iH} = 1$.

证明 注意

$$f_{iH}^{(1)} = \mathbb{P}_i[\sigma_H = \tau_1] = \bar{p}_{iH},$$

及

$$f_{iH}^{(n+1)} = \mathbb{P}_i[\sigma_H = \tau_{n+1}] = \sum_{k\notin H} \bar{p}_{ik} \mathbb{P}_k[\sigma_H = \tau_n] = \sum_{k\notin H} \bar{p}_{ik} f_{kH}^{(n)}, \quad n \geqslant 1.$$

然后, 前一断言由第二迭代法得到. 后一断言可由定理 2.12, 命题 1.45 和引理 1.44 导出. □

引理 2.17.

$$\begin{aligned}
f_{iH}^{(1)}(t) &= \bar{p}_{iH} e^{-q_i t},\\
f_{iH}^{(n+1)}(t) &= \int_0^t q_i e^{-q_i s} \sum_{k\notin H} \bar{p}_{ik} f_{kH}^{(n)}(t-s)\mathrm{d}s + \sum_{k\notin H} \bar{p}_{ik} f_{kH}^{(n)} e^{-q_i t}, \quad n \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

证明 由定理 2.3, 有

$$f_{iH}^{(1)}(t) = \mathbb{P}_i[\sigma_H = \tau_1 > t] = \bar{p}_{iH} e^{-q_i t}.$$

其次

$$\begin{aligned}
f_{iH}^{(n+1)}(t) &= \mathbb{P}_i[\sigma_H = \tau_{n+1} > t]\\
&= \mathbb{P}_i[\sigma_H = \tau_{n+1} > t \geqslant \tau_1] + \mathbb{P}_i[\sigma_H = \tau_{n+1}, \tau_1 > t]\\
&=: \mathrm{I} + \mathrm{II}, \qquad n \geqslant 1.
\end{aligned}$$

由强马氏性得出

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_0^t q_i e^{-q_i s} \sum_{k \notin H} \bar{p}_{ik} \mathbb{P}_k [\sigma_H = \tau_n > t - s] \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t q_i e^{-q_i s} \sum_{k \notin H} \bar{p}_{ik} f_{kH}^{(n)}(t-s) \mathrm{d}s \end{aligned}$$

和

$$\mathrm{II} = \int_t^\infty q_i e^{-q_i s} \sum_{k \notin H} \bar{p}_{ik} \mathbb{P}_k [\sigma_H = \tau_n] \mathrm{d}s = \sum_{k \notin H} \bar{p}_{ik} f_{kH}^{(n)} e^{-q_i t}.$$

然后, 由归纳法得出所需断言. □

命

$$e_{iH}^{(n)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} f_{iH}^{(n)}(t) \mathrm{d}t, \qquad e_{iH}(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty e_{iH}^{(n)}, \quad 0 \leqslant \lambda < q_i, \quad \forall i \in E. \tag{2.16}$$

引理 2.18. 我们有

$$\begin{aligned} e_{iH}^{(1)}(\lambda) &= \frac{1}{q_i - \lambda} \bar{p}_{iH}, \\ e_{iH}^{(n+1)}(\lambda) &= \frac{q_i}{q_i - \lambda} \sum_{k \notin H} \bar{p}_{ik} e_{kH}^{(n)}(\lambda) + \frac{1}{q_i - \lambda} \sum_{k \notin H} \bar{p}_{ik} f_{kH}^{(n)}. \end{aligned}$$

特别地, $(e_{iH}(\lambda) : i \in E)$ 是方程

$$x_i = \frac{q_i}{q_i - \lambda} \sum_{k \notin H} \bar{p}_{ik} x_k + \frac{1}{q_i - \lambda} f_{iH}, \quad i \in E \tag{2.17}$$

的最小解.

证明 只需证明后一断言. 为此, 应用定理 1.43 于

$$g_i^{(1)} = \bar{p}_{iH}, \qquad g_i^{(n+1)} = \sum_{k \notin H} \bar{p}_{ik} f_{kH}^{(n)}, \qquad g_i = \sum_{n=1}^\infty g_i^{(n)}.$$

并注意由引理 2.16, $g_i = f_{iH}\ (i \in E)$. □

引理 2.19. 若链遍历, 则对 $\forall\ i \in H, e_{iH}(0) = \mathbb{E}_i \sigma_H < \infty$. 进而对 $\forall\ i \in E, e_{iH}(0) < \infty$.

证明 a) 命 $\sigma_i := \sigma_{\{i\}}$, 则对 $i \in H$, $\sigma_H \leqslant \sigma_i$. 再令 $F_{ij} = \mathbb{P}_i[\sigma_j \leqslant t]$, 由用类似证明 (2.4) 的方法可证

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-q_i t} + \int_0^t p_{jj}(t-s) \mathrm{d}F_{ij}(s). \tag{2.18}$$

作 Laplace 变换得出 $(j=i)$

$$p_{ii}(\lambda)=\frac{1}{\lambda+q_i}+p_{ii}(\lambda)f_{ii}(\lambda),$$

即

$$\lambda p_{ii}(\lambda)=\frac{1}{\lambda+q_i}\left(\frac{1-f_{ii}(\lambda)}{\lambda}\right)^{-1}.$$

这里 $f_{ii}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda s}\mathrm{d}F_{ii}(s)$, 并且

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-f_{ii}(\lambda)}{\lambda}=\int_0^\infty s\mathrm{d}F_{ii}(s)=\mathbb{E}_i\sigma_i.$$

于是

$$0<\pi_i=\lim_{t\to\infty}p_{ii}(t)=\lim_{\lambda\to 0}\lambda p_{ii}(\lambda)=(q_i\mathbb{E}_i\sigma_i)^{-1}.$$

b) 给定 $i\notin H$, 选取 $i_0,i_1,\cdots,i_n=i$ 使得 $i_0\in H$, 且

$$\bar{p}_{i_0i_1}\cdots\bar{p}_{i_{n-1}i}>0.$$

因为 $e_{i_0H}(0)<\infty$, 由引理 1.24 及引理 1.44 即得后一结论. □

定理 2.14 的证明 a) 假定链常返, 则由引理 2.16 知 $f_{iH}=1$ 对于一切 i 成立. 从而由引理 2.18 知, $(e_{iH}(\lambda):i\in E)$ 是方程

$$x_i=\frac{q_i}{q_i-\lambda}\sum_{k\notin H}\bar{p}_{ik}x_k+\frac{1}{q_i-\lambda},\qquad i\in E$$

的最小解.

若链正常返, 则由引理 2.19 知对 $\forall\, i\in E, e_{iH}(0)<\infty$. 命 $y_i=0, i\in H$ 和 $y_i=e_{iH}(0), i\notin H$, 则对 $i\notin H$,

$$\sum_j q_{ij}y_j=\sum_{j\notin H}q_{ij}e_{jH}(0)=-1.$$

同时

$$\sum_{i\in H}\sum_{j\neq i}q_{ij}y_j=\sum_{i\in H}\sum_{j\notin H}q_{ij}e_{jH}(0)=\sum_{i\in H}(q_ie_{iH}(0)-1)<\infty.$$

故 (2.11) 成立.

b) 反方向的证明类似于离散参数情形. 设 (x_i) 是方程

$$\begin{cases}\sum\limits_j q_{ij}x_j+1\leqslant 0, & i\notin H,\\ \sum\limits_{i\in H}\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}x_j<\infty\end{cases}$$

的最小解. 定义

$$c_i = \begin{cases} 1, & i \notin H; \\ -\sum_j q_{ij} x_j, & i \in H, \end{cases}$$

则

$$c_i + \sum_j q_{ij} x_j \leqslant 0, \quad i \in E.$$

于是对 $\forall\ \lambda > 0$,

$$x_i - c \geqslant \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{\lambda + q_i}(x_j - c) + \frac{c_i - \lambda c}{\lambda + q_i}, \quad i \in E,$$

此处 $c = 0 \wedge \inf\{c_j/\lambda : j \in E\} > -\infty$.

又, $(p_{ij}(\lambda))$ 满足向后方程 (2.6), 由比较定理 (定理 1.40) 得出

$$x_i - c \geqslant \sum_j p_{ij}(\lambda)(c_j - \lambda c), \quad i \in E.$$

现在, 由正则性, $\lambda \sum\limits_j P_{ij}(\lambda) = 1$, 从而

$$x_i \geqslant \sum_j p_{ij}(\lambda) c_j, \quad i \in E, \ \lambda > 0.$$

进而

$$x_i \geqslant \sum_{j \notin H} p_{ij}(\lambda) + \sum_{j \in H} p_{ij}(\lambda) c_j = \lambda^{-1} + \sum_{j \in H} p_{ij}(\lambda)(c_j - 1).$$

即

$$\lambda x_i \geqslant 1 + \sum_{j \in H} \lambda p_{ij}(\lambda)(c_j - 1), \quad i \in E, \ \lambda > 0.$$

由于

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda p_{ij}(\lambda) = \lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_{ij} = \pi_j,$$

可见

$$0 \geqslant 1 + \sum_{j \in H} \pi_j (c_j - 1).$$

由不可约性, 这说明对于一切 j, $\pi_j > 0$. □

§2.3　单生过程与生灭过程

我们已经讨论了马氏链的四个基本课题:

(1) 唯一性, (2) 常返性, (3) 遍历性, (4) 指数遍历性.

所有的判别法都使用了检验函数 (y_i) 或 (ϕ_i), 这是一般情形所能期望得出的最好解答. 无需检验函数的马氏链, 主要只有两类: 一类是单生过程, 另一类是分支过程. 我们先介绍单生过程.

定义 2.20. 称 $Q = (q_{ij}:\ i, j \in \mathbb{Z}_+)$ 为**单生 Q 矩阵**, 若 $q_{i,i+1} > 0$ 但 $q_{i,i+j} = 0, i \geqslant 0, j \geqslant 2$. 而称 Q 为**生灭 Q 矩阵**, 若 $q_{i,i+1} =: b_i > 0 (i \geqslant 0), q_{i,i-1} =: a_i > 0$, 而且对一切 $|i-j| \geqslant 2$, $q_{ij} = 0$.

下面, 我们稍许放宽条件: 即允许

$$N := \max\{i+1:\ \ q_{i,i+1} = 0\} < \infty.$$

当 $N = \max\varnothing = 0$ 时, 则回到单生 Q 矩阵. 当 $N \geqslant 1$ 时, 则分别称之为**单生型**或**生灭型 Q 矩阵**.

唯一性

定理 2.21. 对于每 $n \geqslant N$, 定义 $m_n = q_{n,n+1}^{-1}\big(1 + \sum_{j=0}^{N-1} q_{nj} + \sum_{k=N}^{n-1} m_k \sum_{j=0}^{k} q_{nj}\big)$, 并约定 $\sum_{\varnothing} = 0$. 则 Q 过程唯一当且仅当 $\sum_{n=N}^{\infty} m_n = \infty$. 特别地, 对于生灭型, 我们有

$$m_n = \frac{1}{b_n} + \frac{a_N \cdots a_n}{b_N \cdots b_n} + \sum_{k=N}^{n-1} \frac{a_{k+1} \cdots a_n}{b_k \cdots b_n}, \quad n \geqslant N.$$

证明　a) 只需证明对于每 $\lambda > 0$, 方程

$$u_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} u_j / (\lambda + q_i), \qquad 0 \leqslant u_i \leqslant 1, \quad i \geqslant 0$$

的最大解 (u_i^*) 恒等于零. 当 $N \geqslant 1$ 时, 集 $\{0, 1, \cdots, N-1\}$ 构成了此链的闭子类, 从而对于一切 $i \leqslant N-1$, $u_i^* = 0$.

b) 定义 $q_k^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} q_{kj}\ (i < k, k \geqslant 1)$ 及

$$\begin{cases} F_k^{(k)} = 1, \quad k \geqslant N; \\ F_k^{(i)} = \sum_{j=i}^{k-1} q_k^{(j)} F_j^{(i)} / q_{k,k+1}, \quad k > i \geqslant N. \end{cases} \tag{2.19}$$

则 $m_n = q_{n,n+1}^{-1}\big(1 + q_n^{(N-1)} + \sum\limits_{k=N}^{n-1} q_n^{(k)} m_k\big)$, $n \geqslant N$. 由归纳法得出

$$F_n^{(N)} \leqslant q_{N,N+1} m_n, \qquad n \geqslant N. \tag{2.20}$$

c) 设 (u_i) 满足方程:

$$(1+q_i)u_i = \sum_{j\neq i} q_{ij}u_j, \quad i \geqslant 0; \quad \text{对于一切 } k \leqslant N-1,\ u_k = 0 \text{ 但 } u_N = 1. \tag{2.21}$$

应用 a) 于 $\lambda = 1$, 只需证明 (u_i) 无界当且仅当 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} m_n = \infty$. 由 (2.21) 可见

$$u_{n+1} - u_n = q_{n,n+1}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)}(u_{k+1} - u_k) + u_n\right], \qquad n \geqslant 0. \tag{2.22}$$

从而 u_i 关于 i 单调上升. 本证明的关键在于下述估计:

$$m_k \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant (u_{N+1} - u_N)F_k^{(N)} + u_k m_k, \qquad k \geqslant N. \tag{2.23}$$

为证 (2.23), 使用归纳法. 留意 $m_N = q_{N,N+1}^{-1}\big[1 + q_N^{(N-1)}\big] = u_{N+1} - u_N$ 并顾及 (2.22) 得出

$$u_{n+1} - u_n = q_{n,n+1}^{-1}\left[q_n^{(N-1)} + \sum_{k=N}^{n-1} q_n^{(k)}(u_{k+1} - u_k) + u_n\right], \qquad n \geqslant N.$$

假定对于一切 k: $N \leqslant k \leqslant n-1$, (2.23) 成立. 现在考虑 $k = n$ 情形. 那么

$$u_{n+1} - u_n \geqslant q_{n,n+1}^{-1}\left[q_n^{(N-1)} + \sum_{k=N}^{n-1} q_n^{(k)} m_k + u_n\right] \geqslant m_n, \qquad n \geqslant N+1,$$

而且

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &\leqslant q_{n,n+1}^{-1}\Bigg[(u_{N+1} - u_N)\sum_{k=N}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(N)} + q_n^{(N-1)} + \\
&\qquad + \sum_{k=N}^{n-1} q_n^{(k)} m_k u_k + u_n\Bigg] \\
&\leqslant (u_{N+1} - u_N)F_n^{(N)} + \frac{u_n}{q_{n,n+1}}\left[1 + q_n^{(N-1)} + \sum_{k=N}^{n-1} q_n^{(k)} m_k\right] \\
&= (u_{N+1} - u_N)F_n^{(N)} + u_n m_n, \qquad n \geqslant N+1.
\end{aligned}$$

d) 最后证明, (u_i) 有界当且仅当 $R := \sum_{n=N}^{\infty} m_n < \infty$. 先设 $u_\infty := \lim_{n\to\infty} u_n < \infty$, 则由 (2.23) 得出

$$R = \sum_{k=N}^{\infty} m_k \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_\infty - 1 < \infty.$$

反之, 设 $R < \infty$. 因为

$$u_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} \quad \text{且} \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1, \quad k \geqslant N,$$

可见只要 $u_{k+1}/u_k - 1 \to 0$, 就有

$$\prod_k \frac{u_{k+1}}{u_k} \quad \text{和} \quad \sum_k \log \frac{u_{k+1}}{u_k},$$

进而

$$\sum_k \log \frac{u_{k+1}}{u_k} \quad \text{和} \quad \sum_k \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} - 1 \right)$$

同时敛散. 但由 (2.23) 和 (2.20) 得出

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_{k+1}u_k^{-1} - 1 &\leqslant (u_{N+1} - u_N)u_k^{-1}F_k^{(N)} + m_k \\ &\leqslant [1 + (u_{N+1} - u_N)q_{N,N+1}]\, m_k. \end{aligned}$$

综合以上事实, 便可导出所需结论. □

下一结果说明, 对于唯一性而言, $N = 0$ 情形是本质的. 其概率证明也十分有趣.

定理 2.22. 设 $N \geqslant 1$. 任意取定正数序列 $(b_i : i \leqslant N-1)$. 如 $q_{i,i+1} = 0$, 定义 $\bar{q}_{i,i+1} = b_i$, $\bar{q}_i = q_i + b_i$; 而对于其他的 $j \neq i$, 定义 $\bar{q}_{ij} = q_{ij}$. 则 (q_{ij}) 过程唯一当且仅当 $(\bar{q}_{ij})$ 过程唯一. 换言之, $N \geqslant 1$ 的情形可化为 $N = 0$ 的情形.

证明 以 (X_t) 和 $(\overline{X}_t)$ 分别表示由 (q_{ij}) 和 $(\bar{q}_{ij})$ 所决定的最小过程. 我们需要证明在每一有限时间上, (X_t) 比 $(\overline{X}_t)$ 多跳有限多次. 设 $(\widetilde{X}_t)$ 为一最小过程, 它对应于如下 Q 矩阵 $(\tilde{q}_{ij})$: 当 $i \leqslant N-1$ 时, $\tilde{q}_i = 0$; 而对于一切 $i \geqslant N$, $\tilde{q}_{ij} = q_{ij}$. 留意对于每一 $i \leqslant N-1$, $(\overline{X}_t)$ 以参数为 $\bar{q}_i$ 的指数律停留在 i 处, 然后跳到其他地方. 这是仅有的方式使得 $(\overline{X}_t)$ 产生比 $(\widetilde{X}_t)$ 更多的跳. 由条件独立性及 $N < \infty$ 之事实, 这种跳在每一有限时间区间内至多只有有限多. 这样, 在每一有限时间区间内, $(\overline{X}_t)$ 至多比 $(\widetilde{X}_t)$ 多出有限多个跳. 同样的结论适用于 (X_t) 和 $(\widetilde{X}_t)$, 因而证得所述断言. □

常返性与正常返性. 命中概率及其一阶矩

当 $N=0$ 时, 下述两定理分别给出过程的常返性和正常返性判准; 而当 $N\geqslant 1$ 时, 它们分别给出过程以概率 1 命中集合 $\{0,\cdots,N-1\}$ 和命中时间的一阶矩有限的判准.

定理 2.23. 若 $N=0$, 设 Q 不可约. 若 $N\geqslant 1$, 设对于每 $i_0\geqslant N$, 存在 $i_1,\cdots,i_m$, 使得 $i_m\leqslant N-1$ 且 $q_{i_0i_1}q_{i_1i_2}\cdots q_{i_{m-1}i_m}>0$. 命 $\tau_N=\inf\{t\geqslant 0: X_t\leqslant N-1\}$, 则对于每 $i\geqslant N$ (如$N\geqslant 1$) (相应地, $i\geqslant 1$ (如 $N=0$)), 当且仅当 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}F_n^{(N)}=\infty$ 时, $\mathbb{P}^i[\tau_N<\infty]=1$, 其中 $(F_n^{(k)})$ 由 (2.19) 所定义. 对于生灭型, $F_N^{(N)}=1$, $F_n^{(N)}=a_{N+1}\cdots a_n/(b_{N+1}\cdots b_n)$, $n>N$.

定理 2.24. 在定理 2.23 的假设之下, 对于每 $i\geqslant N$ (如 $N\geqslant 1$) (相应地, $i\geqslant 1$ (如 $N=0$)), 当且仅当 $d:=\sup\limits_{k\geqslant N}\sum\limits_{s=N}^{k}d_s\Big/\sum\limits_{s=N}^{k}F_s^{(N)}<\infty$ 时, $\mathbb{E}^i\tau_N<\infty$, 其中 $d_N=0$, $d_n=\left(1+\sum\limits_{s=N}^{n-1}d_s\sum\limits_{j=0}^{s}q_{nj}\right)\Big/q_{n,n+1}$, $n>N$.

特别地, 对于生灭型, $d_N=0$, $d_n=1/b_n+\sum\limits_{k=N+1}^{n-1}a_{k+1}\cdots a_n/(b_k\cdots b_n)$, $n>N$.

定理 2.23 和定理 2.24 的证明 a) 我们先证明 $N\geqslant 1$ 的情形可归结为 $N=0$ 的情形.

不失一般性, 可将 $\{0,\cdots,N-1\}$ 视为单点 0. 所得到的马氏链是以 0 为吸收态的单生过程. 这样, 我们就把 $N\geqslant 2$ 的情况归结为 $N=1$ 的情形.

给定一个马氏链, 把其中的一点, 例如说原点改为吸收态, 得出一个新的马氏链 $(\widetilde{X}_t)$. 置 $\tilde{\tau}_0=\inf\{t\geqslant 0:\widetilde{X}_t=0\}$. 则由定理 2.12, 命题 1.44 和定理 2.14 知, 原马氏链常返 (相应地, 正常返) 当且仅当 $\mathbb{P}^i[\tilde{\tau}_0<\infty]=1$ (相应地, $\mathbb{E}^i\tilde{\tau}_0<\infty$). 这样, 我们就把 $N=1$ 情形归结为 $N=0$ 情形.

b) 往证常返性. 先证: 若 $Q=(q_{ij})$ 是正则不可约 Q 矩阵, 则相应的 $P(t)$ 常返当且仅当对于某 (等价地, 任意) 固定的 j_0, 方程

$$x_i=\sum_{k\neq j_0,i}q_{ik}x_k/q_i,\quad 0\leqslant x_i\leqslant 1,\quad i\in E \tag{2.24}$$

只有零解.

事实上, 由定理 2.12 和引理 1.44 及引理 2.16, 只需证明方程

$$x_i=\sum_{k\neq j_0,i}q_{ik}x_k/q_i+q_{ij_0}/q_i,\quad i\in E \tag{2.25}$$

的最小解 (x_i^*) 恒等于 1. 注意方程 (2.24) 是方程 (2.25) 的齐次方程. 另一方面, 由于 $(x_i = 1 : i \in E)$ 是方程 (2.25) 的非负解, 从而对于一切 i, $x_i^* \leqslant 1$. 综合以上事实, 便可得出所需断言.

c) 现在, 为证明过程的常返性, 只需证: 当且仅当 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} < \infty$ 时, 方程 (2.24) 有非平凡解. 取 $j_0 = 0$. 则方程 (2.24) 有非平凡解当且仅当方程

$$x_i = \sum_{k \neq 0, i} q_{ik} x_k / q_i, \quad x_0 = 1, \ i \in E$$

有非负有界解. 但后一方程的解唯一:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 = x_1, \\ x_{i+1} - x_i &= \left(\sum_{j=1}^{i-1} q_{ij}(x_i - x_j) + q_{i0} x_i \right) \Big/ q_{i,i+1} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{i-1} q_{ij}(x_i - x_j) + q_{i0} \right) \Big/ q_{i,i+1}, \quad i \geqslant 1. \end{aligned}$$

显然, x_i 关于 i 单调上升. 因此, 问题归结为证明: (x_i) 有界当且仅当 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} < \infty$. 命 $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. 使用分部积分公式

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) v_k = \sum_{k=1}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n.$$

得出

$$\sum_{j=0}^{i-1} q_{ij}(x_i - x_j) = \sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)} (x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=1}^{i-1} q_i^{(j)} (x_{j+1} - x_j).$$

从而

$$x_{i+1} - x_i = \sum_{j=1}^{i-1} q_i^{(j)} (x_{j+1} - x_j) / q_{i,i+1} + q_i^{(0)} / q_{i,i+1}, \quad i \geqslant 1.$$

这说明 $(y_i := x_{i+1} - x_i : i \geqslant 1)$ 是方程

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} q_i^{(j)} y_j / q_{i,i+1} + q_i^{(0)} / q_{i,i+1}, \quad i \geqslant 1$$

的非负解. 但此方程的解也唯一:

$$z_1 = q_1^{(0)} / q_{12}, \quad z_i = \sum_{j=1}^{i-1} q_i^{(j)} z_j / q_{i,i+1} + q_i^{(0)} / q_{i,i+1}, \quad i \geqslant 2.$$

由归纳法易证

$$z_i = F_i^{(0)}, \quad i \geqslant 1.$$

综合以上事实得出

$$x_0 = x_1 = 1 = F_0^{(0)}, \quad x_{i+1} - x_i = F_i^{(0)}, \quad i \geqslant 1.$$

这自然推出所欲证者.

d) 最后证明正常返性. 为此, 使用定理 2.14. 设 (u_i) $(u_0 = 0)$ 为不等式 (2.11) (取 $H = \{0\}$) 的非负解. 则

$$\begin{aligned} q_{k,k+1}(u_{k+1} - u_k) + 1 &= \sum_j q_{kj} u_j + 1 - \sum_{j=0}^{k-1} q_{kj} u_j - q_{k,k+1} u_k + q_k u_k \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} q_{kj}(u_k - u_j) = \sum_{j=0}^{k-1} q_k^{(j)}(u_{j+1} - u_j). \end{aligned}$$

由此及归纳法得出

$$v_k \leqslant F_k^{(0)} v_0 - d_k, \quad k \geqslant 0,$$

其中

$$v_k = u_{k+1} - u_k, \quad k \geqslant 0.$$

因此

$$0 \leqslant u_{k+1} = \sum_{s=0}^{k} v_s \leqslant \left(\sum_{s=0}^{k} F_s^{(0)}\right) v_0 - \sum_{s=0}^{k} d_s = \left(\sum_{s=0}^{k} F_s^{(0)}\right) u_1 - \sum_{s=0}^{k} d_s.$$

这给出 $d \leqslant u_1 < \infty$. 反之, 假定 $d < \infty$. 令

$$u_0 = 0, \quad u_1 \in [d, \infty), \quad u_{k+1} = u_k + F_k^{(0)} u_1 - d_k, \quad k \geqslant 1.$$

显然有

$$\sum_{j \neq 0} q_{0j} u_j = q_{01} u_1 < \infty.$$

此外, 对每 $k > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} 1 + q_{k,k+1}(u_{k+1} - u_k) &= q_{k,k+1} F_k^{(0)} u_1 - q_{k,k+1} d_k + 1 \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} q_k^{(s)} F_s^{(0)} u_1 - \sum_{s=0}^{k-1} q_k^{(s)} d_s = \sum_{s=0}^{k-1} q_k^{(s)} \left(F_s^{(0)} u_1 - d_s\right) \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} q_k^{(s)} (u_{s+1} - u_s) = \sum_{j=0}^{k-1} q_{kj}(u_k - u_j). \end{aligned}$$

即 $\sum_j q_{kj}u_j + 1 = 0, k > 0$.

e) 为证关于生灭过程的末项断言, 注意 $m_n = F_n^{(0)}/b_0 + d_n$. 于是 $\sum_{s=0}^{k} d_s / \sum_{s=0}^{k} F_k^{(0)} = \sum_{s=0}^{k} m_s / \sum_{s=0}^{k} F_s^{(0)} - 1/b_0$. 可见若过程唯一且定理 2.24 的条件满足, 则必有 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} = \infty$. 因而由 Stoltz 定理得出

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{s=0}^{k} d_s}{\sum_{s=0}^{k} F_s^{(0)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{d_k}{F_k^{(0)}} = \frac{1}{b_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_0 \cdots b_k}{a_1 \cdots a_{k+1}}.$$

反之, 若右方收敛, 则由合、分比性质易见定理的条件满足. □

下面, 我们介绍一个使得 $\mathbb{E}^i \tau_N < \infty$ 对于一切 $i \geqslant N$ 成立的较为简便的充分条件.

推论 2.25. 假设定理 2.24 的条件满足, 倘若存在常数 $c_1 \geqslant c_2 \geqslant 0$ 使得

$$M_n := c_1 \sum_{j=0}^{N} q_{nj} + c_2 \left[\sum_{k=N+1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} q_{nj} - q_{n,n+1} \right] \geqslant 1, \qquad n \geqslant N+1. \tag{2.26}$$

则 $\mathbb{E}^i \tau_N < \infty$.

证明 定义 $G_n = c_1 F_n^{(N)} - c_2, n \geqslant N$. 由 (2.19) 可见

$$\begin{aligned} G_n &= c_1 \sum_{j=N}^{n-1} q_n^{(j)} F_j^{(N)} / q_{n,n+1} - c_2 \\ &= c_1 q_n^{(N)} / q_{n,n+1} + c_1 \sum_{j=N+1}^{n-1} q_n^{(j)} F_j^{(N)} / q_{n,n+1} - c_2 \\ &= c_1 q_n^{(N)} / q_{n,n+1} + \sum_{j=N+1}^{n-1} q_n^{(j)} G_j / q_{n,n+1} + c_2 \sum_{j=N+1}^{n-1} q_n^{(j)} / q_{n,n+1} - c_2 \\ &= M_n / q_{n,n+1} + \sum_{j=N+1}^{n-1} q_n^{(j)} G_j / q_{n,n+1}. \end{aligned}$$

由此及 d_n 的定义 $s = 0$ (见定理 2.23) 得出

$$\begin{cases} G_n = M_n / q_{n,n+1} + \sum\limits_{j=N+1}^{n-1} q_n^{(j)} G_j / q_{n,n+1}, \\ d_n = 1/q_{n,n+1} + \sum\limits_{j=N+1}^{n-1} q_n^{(j)} d_j / q_{n,n+1}, \qquad n \geqslant N+1. \end{cases} \tag{2.27}$$

因为 $G_N = c_1 - c_2 \geqslant 0 = d_N$ 及 (2.26), $G_{N+1} = M_{N+1}/q_{N+1,N+2} \geqslant 1/q_{N+1,N+2} = d_{N+1}$. 再次使用 (2.26), (2.27) 和归纳法, 得出 $d_n \leqslant G_n = c_1 F_n^{(N)} - c_2 \leqslant c_1 F_n^{(N)}$ 对于一切 $n \geqslant N$ 成立, 因而

$$\sup_{n\geqslant N} \sum_{k=N}^{n} d_k \Big/ \sum_{k=N}^{n} F_k^{(N)} \leqslant \sup_{n\geqslant N} d_n / F_n^{(N)} \leqslant c_1 < \infty. \qquad \square$$

§2.4 分支过程与扩展的分支过程

分支过程

一个典型的分支过程是具有如下的 Q 矩阵的马氏链:

$$q_{ij} = \begin{cases} i\lambda p_0, & j = i-1; \\ -i\lambda(1-p_1), & j = i; \\ i\lambda p_{j-i+1}, & j \geqslant i+1; \\ 0, & j < i-1, \end{cases}$$

其中 $(p_i, i \geqslant 0)$ 为一概率分布. 此分支过程的背景是: 假定在 0 时刻有 X_0 个粒子, 每个粒子分裂时间是独立同分布的,且服从参数为 λ 的指数分布. 同时每个粒子分类的粒子数 (“下一代”) 的个数也是独立同分布的, 其分布列是 $(p_i, i \geqslant 0)$. X_t 表示 t 时刻总的粒子数.

如同离散时间的分支过程, 0 是吸收点 (因为 $q_0 = 0$), 我们关心的首要问题是所谓的灭绝概率

$$r_i = \lim_{t\to\infty} p_{i0}(t).$$

由独立性可得 $r_i = r_1^i$, 因此只需考虑 $r = r_1$.

记

$$\phi(t,s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1j}(t)s^j, \quad t \geqslant 0, s \in (0,1),$$

则容易得到

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t)s^j = \phi(t,s)^i, \quad \phi(t+u,s) = \phi(t,\phi(u,s)).$$

固定 $h > 0$, 考虑 h 骨架过程 $Y_n = X_{nh}, n \geqslant 0$, 则

$$\mathbb{P}[\exists n, Y_n = 0] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_n = 0] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_{nh} = 0] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}[X_t = 0] = r.$$

于是由上一章的定理 1.48 可知, 对 $\forall\, t>0$, r 为 $\phi(t,s)=s$ 的最小非负解.

由于 $p_{ij}(t)=\delta_{ij}+q_{ij}t+o(t)$, 所以

$$\phi(t,s)=\sum_{j=0}^{\infty}[\delta_{ij}+q_{ij}t+o(t)]s^j=s+\lambda t[P(s)-s]+o(t),$$

考虑到 $\phi(t,r)=r$, 再令 $t\downarrow 0$, 我们得到

定理 2.26. 令 $P(s)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k s^k$, 则 r 是方程 $P(s)=s$ 的最小非负解. 从而 $r=1$ 当且仅当 $P'(1)\leqslant 1$, 即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kp_k\leqslant 1$.

扩展的分支过程

在很多情况下, 上节所要求的独立性并不满足, 即粒子之间会有交互作用, 因此我们需考虑更广泛的分支过程. 假设 Q 矩阵具有如下的形式:

$$q_{ij}=\begin{cases}a_j, & i=0;\\ i^{\nu}\lambda p_0, & i\geqslant 1, j=i-1;\\ -i^{\nu}\lambda(1-p_1), & i\geqslant 1, j=i;\\ i^{\nu}\lambda p_{j-i+1}, & i\geqslant 1, j\geqslant i+1;\\ 0, & \text{其他 } i,j,\end{cases}\tag{2.28}$$

其中 $\nu>0, \lambda>0$, $a_0<0$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i=0$; $(p_i: i\geqslant 0)$ 如前. 当 $\nu=1$ 时, 称为线性的, 当 $\nu<1$ 时, 称为次线性的, 当 $\nu>1$ 时, 称为超线性的.

记

$$A(s)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j s^j,\quad P(s)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j s^j,\quad s\in[0,1].$$

定理 2.27. 如果 $M:=P'(1)\leqslant 1$, 则分支过程唯一; 当 $\nu>1$ 时, $P'(1)\leqslant 1$ 还是必要条件.

证明 首先证明当 $M\leqslant 1$ 时, 过程唯一. 由定理 2.22, 不妨假定 $q_0=0$. 应用定理 2.9, 取 $E_n=\{1,2,\cdots,n\}$, $\phi_i=i+1$, 则

$$\sum_j q_{ij}(\phi_j-\phi_i)=-q_{ii-1}+\sum_{j=i+1}^{\infty}q_{ij}(j-i)=r^{\nu}\lambda(M-1)\leqslant 0,\quad i\geqslant 1.$$

从而 $\sum\limits_j q_{ij}(\phi_j-\phi_i)\leqslant\phi_i, i\geqslant 0$.

假设 $\nu>1, \gamma_i=\alpha i^{\nu}$ 且 $M>1$. 为证过程非唯一, 我们将与一个生灭过程作比较. 令 $\Gamma\in(p_0, p_0+M-1)$ 待定. 构造生灭过程 $\bar{p}_{ij}$, 具有生速率 $b_0=0, b_i=\gamma_i\Gamma$

和死速率 $a_i = \gamma_i p_0, i \geqslant 1$. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}\cdots a_n}{b_k\cdots b_n}\right)=\frac{1}{\Gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{p_0}{\Gamma}\right)^n<\infty,$$

从而由定理 2.21, 此生灭过程非唯一. 因此方程

$$a_i(u_{i-1}-u_i)+b_i(u_{i+1}-u_i)=\lambda u_i,\quad u_0=0,\lambda>0,i\geqslant 1$$

有非负的 (非零的) 有界解. 容易看到 $u_i\uparrow$, 且

$$u_{i+1}-u_i\geqslant\frac{p_0}{\Gamma}(u_i-u_{i-1}),\quad i\geqslant 1. \tag{2.29}$$

由于当 $\Gamma\downarrow p_0$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_{k+1}\sum_{\ell=0}^{k-1}\left(\frac{p_0}{\Gamma}\right)^{\ell}\uparrow\sum_{k=1}^{\infty}kp_{k+1}=p_0+M-1>p_0,$$

从而可选取 $\Gamma\in(p_0,p_0+M-1)$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_{k+1}\sum_{\ell=0}^{k-1}\left(\frac{p_0}{\Gamma}\right)^{\ell}\geqslant\Gamma. \tag{2.30}$$

由 (2.29) 和 (2.30), 对 $i\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_j q_{ij}(u_j-u_i)&=a_i(u_{i-1}-u_i)+\gamma_i\sum_{k=1}^{\infty}p_{k+1}\sum_{\ell=1}^{k}(u_{i+\ell}-u_{i+\ell-1})\\&\geqslant a_i(u_{i-1}-u_i)+\gamma_i(u_{i+1}-u_i)\sum_{k=1}^{\infty}p_{k+1}\sum_{\ell=0}^{k-1}\left(\frac{p_0}{\Gamma}\right)^{\ell}\\&\geqslant a_i(u_{i-1}-u_i)+b_i(u_{i+1}-u_i)=\lambda u_i.\end{aligned}$$

由比较定理 (定理 1.40) 和唯一性定理 (定理 2.7) 可知原过程非唯一. □

定理 2.28. 分支过程常返当且仅当 $P'(1)\leqslant 1$.

证明 由定理 2.12, 只需考虑其嵌入链 $\bar{P}=(\bar{p}_{ij})$ 的常返性. 注意到

$$\bar{p}_{ij}=\begin{cases}\dfrac{p_{j-i+1}}{1-p_1}, & j\neq i, j\geqslant i-1\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

与 ν 无关, 所以由上一节证得的充要条件即知定理成立. □

定理 2.29. 设 $\nu \geqslant 1, M \leqslant 1$. 分支过程遍历当且仅当

$$\int_0^1 \frac{A(s)}{P(s)-s}(1-s)^{\nu-1}\mathrm{d}s < \infty. \tag{2.31}$$

证明 只需证明有满足以下方程的解:

$$\mu_j q_j = \sum_{i \neq j} \mu_i q_{ij}, \quad \mu_j > 0, j \geqslant 0, \sum_j \mu_j < \infty. \tag{2.32}$$

a) 首先证明满足方程 (2.32) 的解 $\mu_i \downarrow (i \geqslant 1)$, 从而 (μ_i) 有界. 事实上, 由于 $1 \geqslant M = \sum_{k \geqslant 0} k p_k = \sum_{k \geqslant 0} (k-1) p_k + 1$, 则 $p_0 \geqslant \sum_{k \geqslant 2} p_k$, 从而 $2^\nu p_0 + p_1 \geqslant 1$.

$$\mu_2 = \frac{\mu_1 q_1 - \mu_0 q_{01}}{q_{21}} \leqslant \frac{\mu_1 q_1}{q_{21}} = \mu_1 \frac{1-p_1}{2^\nu p_0} \leqslant \mu_1.$$

假设 $\mu_j \leqslant \mu_{j-1} \leqslant \cdots \leqslant \mu_1$, 则对 $j \geqslant 2$ 有

$$q_{j+1,j}\mu_{j+1} = \mu_j q_j - \sum_{i=0}^{j-1} \mu_i q_{ij} \leqslant \mu_j \left(q_j - \sum_{i=1}^{j-1} q_{ij} \right).$$

注意由中值定理

$$\begin{aligned} q_{j+1,j} - q_j + \sum_{i=0}^{j-1} q_{ij} &= p_0[(j+1)^\nu - j^\nu] - \sum_{k=2}^{j} [j^\nu - (j+1-k)^\nu] p_k - j^\nu \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k \\ &\geqslant \nu j^\nu p_0 - \nu j^{\nu-1} \sum_{k=2}^{j} (k-1) p_k - \nu j^{\nu-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} (k-1) p_k \\ &= \nu j^{\nu-1}(1-M) \geqslant 0, \end{aligned}$$

于是 $\mu_{j+1} \geqslant \mu_j$.

b) 因为

$$\mu_j q_j = \sum_{i=0}^{j-1} \mu_i q_{ij} + \mu_{j+1} q_{j+1,j},$$

则

$$\mu_j j^\nu (1-p_1) = \mu_0 a_j + \sum_{i=1}^{j-1} \mu_i i^\nu p_{j-i+1} + \mu_{j+1}(j+1)^\nu p_0, \quad j \geqslant 1. \tag{2.33}$$

在 (2.33) 式两边同乘以 s^j, 再关于 $j \geqslant 1$ 求和得到

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j j^\nu s^{j-1} = \mu_0 q_0 \frac{A(s)}{P(s)-s}. \tag{2.34}$$

在 (2.33) 式两边同乘以 $(1-s)^{\nu-1}$, 然后关于 $s\in(0,1)$ 积分得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j j^{\nu}\int_0^1 s^{j-1}(1-s)^{\nu-1}\mathrm{d}s=\mu_0 q_0\int_0^1\frac{A(s)}{P(s)-s}(1-s)^{\nu-1}\mathrm{d}s.$$

注意

$$\int_0^1 s^{j-1}(1-s)^{\nu-1}\mathrm{d}s=\frac{\Gamma(j)\Gamma(\nu)}{\Gamma(j+\nu)}\sim j^{-\nu},\quad j\to\infty,$$

因此 $\sum_j \mu_j<\infty$ 当且仅当

$$\int_0^1\frac{A(s)}{P(s)-s}(1-s)^{\nu-1}\mathrm{d}s<\infty.\qquad\square$$

§2.5 补充与习题

1. (Poisson 过程) Poisson 过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 的转移概率矩阵 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 为:

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}, & \text{当} j-i\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求其 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 并证明

$$P(t)=e^{Qt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Qt)^n}{n!}.$$

2. (纯生过程) $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 的 Q 矩阵如下: $q_i=q_{i,i+1}=b_i>0\ (i\geqslant 0)$, $q_{ij}=0(i\neq j)$. 记 T_n 为第 n 次跳跃的时间, $T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$, 则 $\mathbb{P}_0[T=\infty]=1$ 当且仅当 $\sum\limits_n b_n^{-1}=\infty$.
提示: 考虑 $\mathbb{E}e^{-T}$.

3. 对于有限状态的马氏链, 向前方程和向后方程均成立, 且

$$P(t)=e^{Qt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Qt)^n}{n!}.$$

4. 对于有限状态不可约的马氏链, 则有 $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\pi_j>0$ 且 $\sum\limits_j\pi_j=1$.

5. 证明定理 2.5.
提示: 由 $p_{ij}(s+t)=\sum\limits_k p_{ik}(s)p_{kj}(t)$ 和 Fatou 引理易得 $p'_{ij}(t)=\sum\limits_k q_{ik}p_{kj}(t)$;

另一方面对 $N > i$,

$$\sum_{k\neq i} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \leqslant \sum_{k\leqslant N, k\neq i} p_{ik}(s)p_{kj}(t) + \sum_{k>N} p_{ik}(s)$$
$$= \sum_{k\leqslant N, k\neq i} p_{ik}(s)p_{kj}(t) + 1 - p_{ii}(t) + \sum_{k\leqslant N} p_{ik}(s).$$

在前式两边同除以 s, 再取上极限$\overline{\lim\limits_{s\downarrow 0}}$.

6. 考虑连续时间的不可约的有限状态的马氏链. 其 Q 矩阵为 $q_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, N$, 且 $q_{ij} = q_{ji}$. 给定初始状态. 设 $P_i(t)$ 为 t 时刻在 i 状态的概率, 即 $P_i(t) = \mathbb{P}\{X_t = i\}$. 定义

$$E(t) = -\sum_{i=1}^{N} P_i(t) \log P_i(t).$$

证明 $E(t)$ 是关于 $t \geqslant 0$ 的非降函数.

7. 考虑不可约的有限状态 ($N < \infty$) 的连续时间马氏链, 试证其 Q 矩阵 Q 的秩为 $N - 1$.

8. 考虑有两个状态 $\{0, 1\}$ 的连续时间的马氏链. 在 0 的等待时间服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, 在 1 的等待时间服从参数为 $\mu > 0$ 的指数分布. 求 $p_{00}(t)$.

9. 直接证明 (2.2) $\Leftrightarrow$ (2.4) 和 (2.3) $\Leftrightarrow$ (2.5).

10. 假设 $P(t)$ 的 Q 矩阵有界, 即 $\forall\, i, q_i \leqslant M < \infty$, 则 $P(t)$ 满足向前方程.

11. 若 Q 有界, 则当 $t \downarrow 0$, $P(t)$ 一致地收敛于 I, 即 $\lim\limits_{t\downarrow 0} \sup\limits_{ij} |p_{ij}(t) - \delta_{ij}| = 0$.

提示: 对矩阵 $A = (a_{ij})$, 定义 $||A|| = \sup\limits_{ij} |a_{ij}|$, 则 $||P_t - I|| \leqslant e^{t||Q||} - 1$.

12. 记 $p_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{ij}(t) \mathrm{d}t$, 则

(a) $\forall\, t \geqslant 0, p_{ij}(t) \geqslant 0 \Rightarrow \forall\, \lambda > 0, p_{ij}(\lambda) \geqslant 0$;

(b) $\forall\, t \geqslant 0, \sum\limits_j p_{ij}(t) \leqslant 1 \Rightarrow \forall\, \lambda > 0, \lambda p_{ij}(\lambda) \leqslant 1$;

(c) $\forall\, t, s \geqslant 0, P(t+s) = P(t)P(s) \Rightarrow \forall\, \lambda, \mu > 0, P(\lambda) - P(\mu) + (\lambda - \mu)P(\lambda)P(\mu) = 0$;

(d) $\lim\limits_{t\to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to\infty} (\lambda p_{ij}(\lambda) - \delta_{ij}) = 0$;

(e) $P'(t)|_{t=0} = Q \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda p_{ij}(\lambda) - \delta_{ij}) = q_{ij}$.

13. 证明方程 (2.6) 和 (2.7) 有相同的最小解.

14. 由马氏性证明

(a) $\forall\, i, p_{ii}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上恒为正;

(b) 若 $\exists T>0$ 使得 $p_{ij}(T)>0$, 则 $\forall\, t\geqslant T$, 有 $p_{ij}(t)>0$.

15. (更新过程) 设 $(X_n>0)_{n\geqslant 1}$ 是独立同分布 (iid) 随机变量 (r.v.), 记

$$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n,\quad n\geqslant 1,\quad \text{约定 } S_0=0.$$

定义 $N_t=\#\{n:0<S_n\leqslant t\}$, 则称 $(N_t)_{t\geqslant 0}$ 为更新过程.

(a) 若 X_1 服从参数为 λ 的指数分布, 则 N_t 即是参数为 λ 的 Poisson 过程. 证明 $\mathbb{E}N_t=\mathrm{Var}N_t=\lambda t$.

(b) 若记 $M_t=\mathbb{E}N_t, F_n(x)=\mathbb{P}[S_n\leqslant x]$, 则

$$M_t=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(t).$$

16. (排队论) 假定顾客在一个柜台前排队等待服务 (如在超市出口等待付款), 以 X_t 记 t 时刻排队的长度 (即顾客的人数). 前后两个顾客时间间隔服从独立同分布参数为 λ 的指数分布, 而顾客接受服务的时间服从独立同分布参数为 μ 的指数分布. 试讨论此过程的稳定情况.

17. $\tau_1,\tau_2,\cdots$ 依次为跳跃的时刻, 即 $\tau_1=\inf\{t\geqslant 0:X_t\neq X_0\}$ 为第一次跳跃的时刻, $\tau_n=\inf\{t>\tau_{n-1}:X_t\neq X_{t-}\}$ 为第 n 次跳跃的时刻. 则有

(a) $\tau_1,\tau_2,\cdots$ 独立同分布;

(b) 若定义 $Y_n=X_{\tau_n}$, 则 (Y_n) 是以 $\bar{P}=(\bar{p}_{ij})$ 为转移矩阵的离散时间的马氏链.

18. 证明若对一切 $h>0$, 离散链 $P(h)$ 常返 $\Longleftrightarrow \int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t=\infty$.

提示: 由题 14 知, $\delta(h)=\min\limits_{0\leqslant t\leqslant h}p_{ii}(t)>0$, 从而由马氏性有

$$\min_{nh\leqslant t\leqslant (n+1)h}p_{ii}(t)\geqslant p_{ii}(nh)\delta(h),$$

$$\max_{nh\leqslant t\leqslant (n+1)h}p_{ii}(t)\leqslant p_{ii}((nh+1))/\delta(h).$$

19. 从 C–K 方程, 可得到 $\forall\, i,h\geqslant 0,t\geqslant 0$,

$$\sum_j|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leqslant 2(1-p_{ii}(h)),$$

从而 $\forall\, i,j,p_{ij}(t)$ 关于 $t\in[0,\infty)$ 一致连续. 并由此证明对一切 $h>0$, 离散链 $P(h)$ 遍历 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty}p_{jj}(t)=\pi_j>0$.

20. 固定 $A \subset E$, 令 $\tau_A = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \in A\}$ 为 A 的击中时.

(a) 记 $x_i = \mathbb{P}_i[\tau_A < \infty]$, 则对 $i \notin A$, $\sum\limits_k q_{ik} x_k = 0$.

(b) 记 $y_i = \mathbb{E}_i \tau_A$, 则 $(y_i : i \in E)$ 是如下方程的最小非负解:

$$y_i = 0,\ i \in A; \quad \sum_{k \in E} q_{ik} y_k = -1,\ i \notin A.$$

21. 对马氏链 $(X_t)_{t\geqslant 0}$, 令 $T = |\{t \geqslant 0 : X_t = i\}|$.

(a) 若 i 是常返态, 则 $\mathbb{P}_i[T = +\infty] = 1$.

(b) 若 i 是非常返态, 则 $\mathbb{P}_i[T < +\infty] = 1$, 且 T 服从指数分布.

22. (接题 17) 若 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 具有平稳分布 α, 而 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 具有平稳分布 π, 讨论 α 与 π 的关系.

23. (线性人口增长模型) 考虑如下的生灭过程: $a_n = \mu n, b_n = \lambda n + a, \lambda, \mu, a > 0$. 证明平均人口 $M_t = \mathbb{E} X_t$ 满足微分方程

$$M_t' = a + (\lambda - \mu) M_t.$$

从而当 $\lambda \geqslant \mu$ 时, $\lim\limits_{t\to\infty} M_t = \infty$ 但当 $\lambda < \mu$ 时, $\lim\limits_{t\to\infty} M_t = \dfrac{a}{\mu - \lambda}$.

24. 若 $\lambda P^{\min}(\lambda) 1 = 1$, 则 Q 过程唯一.

25. $P(t)$ 不可约当且仅当 Q 不可约.

26. 若马氏链正常返, 则 (2.11) 式成立.

27. 对正规的不可约的马氏链,证明

(a) 若 $\sup\limits_i q_i < \infty$, 且马氏链正常返, 则嵌入链正常返;

(b) 若 $\inf\limits_i q_i > 0$, 且嵌入链正常返, 则马氏链正常返.

28. 考虑生灭过程 $a_i = b_i, i \geqslant 1$ 满足 $0 < b_i \to \infty, \sum\limits_i 1/b_i < \infty$, 则此过程正常返, 但其嵌入链不是正常返.

29. 设 $p_i > 0, \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, 令 $\bar{p}_{0i} = p_i, i \geqslant 1; \bar{p}_{i0} = 1, i \geqslant 1, \bar{p}_{ij} = 0$ (其他 i, j), 则离散时间马氏链 $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$ 正常返. 若令 $q_i = p_i, q_{ij} = q_i \bar{p}_{ij} (i \neq j)$, 则此 Q 过程不是正常返.

30. 考虑保守的 Q 过程, 令 $q_{0k} = b_k > 0, q_k = q_{k,k-1} > 0,\ k \geqslant 1,\ q_0 = \sum\limits_{k\geqslant 1} q_{0k}$, 对其他的 $j \neq i$, $q_{ij} = 0$.

(a) 讨论此过程的唯一性和常返性.

(b) 假设 $0 < c_1 = \inf_{i\geqslant 1} q_i \leqslant \sup_{i\geqslant 1} q_i = c_2 < \infty$, 则过程遍历当且仅当 $\sum\limits_{k\geqslant 1} kq_{0k} < \infty$.

31. 考虑保守的 Q 过程, 令 $q_{0k} = b_k > 0, q_k = q_{k,0} > 0$, $k \geqslant 0$, 对其他的 $j \neq i$, $q_{ij} = 0$. 讨论此过程的唯一性, 常返性和遍历性.

32. 对 E 上符号测度 μ, 定义其全变差范数为

$$\|\mu\|_{\text{Var}} = \sup_{|f|\leqslant 1}\left|\sum_i \mu_i f_i\right|.$$

证明

(a) $\|\mu\|_{\text{Var}} = \sum\limits_i |\mu_i| = \mu^+(E) + \mu^-(E)$, 从而对概率测度 μ, $\|\mu\|_{\text{Var}} = 1$;

(b) 对概率转移矩阵 P, 定义概率 $(\mu P)_i = \sum\limits_k \mu_k p_{ki}$, 则 $\|\mu P\|_{\text{Var}} \leqslant \|\mu\|_{\text{Var}}$;

(c) 对连续时间马氏链 $P(t)$, $\|\mu P(t)\|_{\text{Var}}$ 关于 $t \geqslant 0$ 单调下降.

33. 考虑生灭过程: $b_n = \alpha n + \beta, a_n = \delta n, \alpha, \beta, \delta > 0$, 则

(a) 过程常返当且仅当 $\alpha < \delta$ 或 $\alpha = \delta \geqslant \beta$;

(b) 过程正常返当且仅当 $\alpha < \delta$;

(c) 在其他情况下, 过程非常返.

提示: 证明用到如下 Kummer 引理: 设序列 $u_n > 0, v_n > 0, \sum\limits_n 1/v_n = \infty$, 极限 $\kappa = \lim\limits_{n\to\infty} v_n u_n/u_{n+1} - v_{n+1}$, 则依 $\kappa > 0$ 或 $\kappa < 0$, 级数 $\sum\limits_n u_n$ 收敛或发散.

34. 讨论如下单生过程的唯一性、常返性和遍历性.

(a) 设 $q_{i,i+1} = 1, q_{i,i-2} = 1 (i \geqslant 2), q_{10} = 1$, 对其他 $i \neq j$, $q_{ij} = 0$.

(b) 设

$$q_{ij} = \begin{cases} a + \lambda i, & j = i+1; \\ diq^{i-1}, & j = 0; \\ dipq^{i-j-1}, & j = 1, 2, \cdots, i-1; \\ a + (\lambda + d)i, & j = i; \\ 0, & \text{其他 } i \neq j. \end{cases}$$

其中 $a > 0, \lambda > 0, p + q = 1$.

35. (拟生灭过程) 考虑二维 Markov 过程 $\{X_t, J_t\}$, 有状态空间

$$E = \{(k, j) : k \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, m\}, \quad m < \infty,$$

其 Q 矩阵如下:

$$Q = \begin{pmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ B_1 & A & C & & \\ & B & A & C & \\ & & B & A & C \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

Q 矩阵中的所有子块是 m 阶方阵. 证明此过程正常返当且仅当矩阵方程 $R^2B + RA + C = 0$ 的最小非负解 R 满足谱半径 $sp(R) < 1$, 并且线性方程

$$\Pi_0(A_0 + RB_1) = 0, \quad \Pi_0(I - R)^{-1}e = 1$$

有唯一正解. 而平稳分布 $\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \cdots)$ 可表述为 $\Pi_k = \Pi_0 R^k, k \geqslant 0$. 这里 $\Pi_k = (\pi_{k1}, \cdots, \pi_{km})$.

提示: 利用定理 2.13 可得 $\Pi_{k-1}C + \Pi_k A + \Pi_{k+1}B = 0, k \geqslant 1$.

36. (反应扩散过程) 考虑状态空间 $\mathbb{Z}_+^S$ 上的 Q 过程, S 有限或可数. 对 $u \in S, x \in E$, $x(u)$ 表示 u 点上的粒子数.

$$q(x,y) = \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 x(u), & y = x + e_u; \\ \lambda_2 x(u), & y = x - e_u; \\ x(u)\rho(u,v), & y = x - e_u + e_v, u \neq v; \\ 0, & \text{其他 } y \neq x. \end{cases}$$

其中 $e_1 = (1,0,\cdots)$, $e_2 = (0,1,\cdots)$, $\cdots$, $\rho(u,v)$ 为 S 上的转移概率矩阵且 $\rho(u,u) = 0$. 讨论过程的唯一性、常返性与正常返性.

第三章　可逆马氏链

§3.1　可逆与可配称马氏链

定义 3.1. 称 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ **可逆**, 若对一切 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和 $i_1,\cdots,i_n$, 只要

$$t_n-t_{n-1}=t_2-t_1,\ \ t_{n-1}-t_{n-2}=t_3-t_2,\ \ \cdots$$

就有

$$\mathbb{P}[X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_n}=i_n]=\mathbb{P}[X_{t_1}=i_n,\cdots,X_{t_n}=i_1].$$

即时间的倒转对于过程的分布并无区别, 如同电影正放或倒放看不出差别一样. 这有重要的物理意义, 统计物理中称为**细致平衡**.

特别地, 若初分布是 (π_i), 则由

$$\mathbb{P}[X_0=i,X_t=j]=\mathbb{P}[X_0=j,X_t=i]$$

得出

$$\pi_i p_{ij}(t)=\pi_j p_{ji}(t), \tag{3.1}$$

$$\iff \pi_i q_{ij}=\pi_j q_{ji}. \tag{3.2}$$

定义 3.2. 称 $P(t)$ 关于 π **可逆**, 如 (3.1) 对一切 t 成立. 称 Q 关于 π **可逆**, 如 (3.2) 成立.

定理 3.3 (存在定理 1970's). $P^{\min}(t)$ 关于 π 可逆 $\iff Q$ 亦然.

定理 3.4. 可逆 Q 过程唯一的充要条件是 Q 可逆且 Q 过程唯一 (允许中断!).

在 (3.1) 式两边对 i 求和得出

$$\sum_i \pi_i p_{ij}(t)=\pi_j\sum_i p_{ji}(t)=\pi_j.$$

这样, 若 $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ (不中断), 则可逆测度必定是平稳分布. 数学上的推广是把 (π_i) 换成未必可和的正数列, 此时把满足 (3.1) 的 $P(t)$ 称为**可配称**以区别于可逆. 对于可配称过程, (π_i) 自然不必是平稳分布, 甚至过程也未必常返. 这便提出两个课题:

(1) 给定 Q, 何时可配称? 如何找出配称测度?

(2) 若 Q 过程可配称, 何时常返?

为研究第一个课题, 我们引进了场论的工具. 为研究第二个课题, 英国人在 20 世纪 80 年代引进了电网络工具, 后来英文书 [10] 里作了统一的处理 (第 7 章).

考虑不可约的马氏链 $P(t)$. 令

$$w_{ij}(t) = \log p_{ij}(t) - \log p_{ji}(t), \quad i, j \in E, t > 0.$$

称 $V(t) = (v_i(t))$ 为 $P(t)$ 的 (一个) 势函数, 如果 $w_{ij}(t) = v_i(t) - v_j(t), i, j \in E, t > 0$. 此时也称 $P(t)$ 为势场.

定理 3.5 (场论基本定理). 下述的命题等价.

(1) $P(t)$ 可配称.

(2) $P(t)$ 为势场.

(3) $P(t)$ 是保守的, 即 $P(t)$ 存在一个与 t 无关的势函数.

定理 3.6 (马氏链的常返性判准). 假定不可约 Q 过程有配称测度 π 并令 $a_{ij} = \pi_i q_{ij}/q_i$. 若 $a_{ij} > 0$, 则在 i, j 之间作一条连线, 并赋予 $1/a_{ij}$ 的电阻. 这样得到一个电网络. 那么 Q 过程常返当且仅当从任意一点 i 到无穷远之间的有效电阻是无穷.

§3.2 谱隙估计

考虑可数集 E 上满足如下条件的矩阵 $Q = (q_{ij})$: $q_{ij} \geqslant 0$ $(i \neq j)$, $0 < q_i := -q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty$. 假定对于某概率测度 $(\pi_i > 0 : i \in E)$ 和一切 i, j 有 $\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}$. 那么, 相应的算子 $\Omega f(i) := \sum_j q_{ij}(f_j - f_i)$ $(i \in E)$ (逐点) 在 $L^2(\pi)$ (实平方可积函数的全体) 上对称. 设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 是由 Q 所唯一决定的 Q 过程. 则不难证明 $P(t)$ 在 $L^2(\pi)$ 中**强连续**:

$$\|P(t)f - f\| \to 0, \qquad \text{当 } t \to 0,$$

此处 $\|\cdot\|$ 表 $L^2(\pi)$ 中的 L^2 范数. $P(t)$ 还是强压缩的: $\|P(t)f\| \leqslant \|f\|$ 对于一切 t 成立. 以 L 表 $P(t)$ 在 $L^2(\pi)$ 中的强无穷小算子 (与 Ω 有别!), 记其定义域为 $\mathscr{D}(L)$. 我们所关心的是如下的 L^2 指数式收敛性:

$$\|P(t)f - \pi(f)\| \leqslant \|f - \pi(f)\|e^{-\varepsilon t}, \qquad t \geqslant 0,\ f \in L^2(\pi),$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为正常数.

下面, 我们要给出最大收敛指数 $\varepsilon_{\max}$ 的刻画. 为此, 定义算子 L 的谱隙

$$\text{gap}(L) = \inf\{-(Lf, f) : \pi(f) = 0, \|f\| = 1\},$$

此处 $\pi(f) = \int f\mathrm{d}\pi$. 要看出 gap$(L)$ 的非负性, 只需配方:

$$-(f,\ Lf) = -\sum_i \pi_i f_i \sum_j q_{ij} f_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \pi_i q_{ij}(f_j - f_i)^2 \geqslant 0.$$

其次, 由基本谱理论 (参见本章附录),

$$\left(\frac{f - P(t)f}{t}, f\right) \uparrow \text{某} D(f, f) \leqslant +\infty, \quad \text{当 } t \downarrow 0. \tag{3.3}$$

而且 $D(f, f) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \pi_i q_{ij}(f_j - f_i)^2$. 过程的唯一性保证了使 (3.3) 右方有限的函数构成了定义域 $\mathscr{D}(D) - \{f \in L^2(\pi) : D(f, f) < \infty\}$ (此证明较难). 今定义

$$\text{gap}(D) = \text{gap}(Q) = \inf\{D(f, f) : \pi(f) = 0 \text{ 且 } \pi(f^2) = 1\}.$$

有了这些记号, 我们可陈述关于收敛速度的基本定理.

定理 3.7. $\varepsilon_{\max} = \text{gap}(D) = \text{gap}(L)$.

证明 由于在 $\mathscr{D}(L)$ 上, $D(f, f) = -(Lf, f)$, 可见 gap$(D) \leqslant$ gap(L). 为证 $\varepsilon_{\max} \geqslant$ gap(L), 只需使用如下事实

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|P(t)f\|^2 = 2(P(t)f, LP(t)f) \leqslant -2\,\text{gap}(L)\|P(t)f\|^2,$$

$$f \in \mathscr{D}(L),\ \pi(f) = 0,\ \|f\| = 1,$$

以及 $\mathscr{D}(L)$ 在 $L^2(\pi)$ 中的稠性. 最后, 设 $f \in \mathscr{D}(D)$ 满足 $\pi(f) = 0$ 及 $\|f\| = 1$, 则

$$D(f, f) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(f - P(t)f, f) \geqslant \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(1 - e^{-\varepsilon t}) = \varepsilon.$$

故 gap$(D) \geqslant \varepsilon$. □

仿有限空间情形 (参见本章附录), 以后也常把 gap(D) 写成λ_1.

现在, 定义伴随矩阵 $Q=(q_{ij})$ 的**图结构**. 称 $\langle i,j\rangle$ 为一条边, 如 $q_{ij}>0$ $(i\neq j)$. 诸相连的边 $\langle i,i_1\rangle,\langle i_1,i_2\rangle,\cdots,\langle i_n,j\rangle$ (i,j 和各 i_k 互不相同) 构成从 i 到 j 的一条路. 假定对于每一对 $i\neq j$, 都存在一条从 i 到 j 的路. 选择并固定这样一条路 γ_{ij}. 其次, 定义诸边 $e=\langle i,j\rangle$ 上的正的权函数 $\{w(e)\}$ 并命 $|\gamma_{ij}|_w=\sum\limits_{e\in\gamma_{ij}}w(e)$. 如 $e=\langle i,j\rangle$, 置 $a(e)=\pi_i q_{ij}$ 并令

$$I(w)(e)=\frac{1}{a(e)w(e)}\sum_{\{i,j\}:\,\gamma_{ij}\ni e}|\gamma_{ij}|_w\pi_i\pi_j,$$

此处 $\{i,j\}$ 表示 i 和 j 的无序对.

定理 3.8. $\lambda_1\geqslant\sup_{w\in\mathscr{W}}\inf_e I(w)(e)^{-1}$.

证明 为简单起见, 若 $e=\langle i,j\rangle$, 则记 $f(e)=f_j-f_i$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式得出

$$(f_i-f_j)^2=\left(\sum_{e\in\gamma_{ij}}f(e)\right)^2\leqslant\left(\sum_{e\in\gamma_{ij}}\frac{f(e)^2}{w(e)}\right)|\gamma_{ij}|_w.$$

这样, 对于每 f, $\pi(f)=0$ 且 $\pi(f^2)=1$, 有

$$\begin{aligned}1&=\frac{1}{2}\sum_{\{i,j\}}\pi_i\pi_j(f_i-f_j)^2=\sum_{\{i,j\}}\pi_i\pi_j\left(\sum_{e\in\gamma_{ij}}f(e)\right)^2\\&\leqslant\sum_{\{i,j\}}\pi_i\pi_j\left(\sum_{e\in\gamma_{ij}}\frac{f(e)^2}{w(e)}\right)|\gamma_{ij}|_w\\&=\sum_e a(e)f(e)^2\frac{1}{a(e)w(e)}\sum_{\{i,j\}:\,\gamma_{ij}\ni e}|\gamma_{ij}|_w\pi_i\pi_j\\&\leqslant D(f,f)\sup_e I(w)(e).\qquad\square\end{aligned}$$

从证明中可以看出, 所使用的图结构是相当自然的, 因为只有使 $q_{ij}>0$ 的 $\{i,j\}$ 才出现在 Dirichlet 型 $D(f,f)$ 中. 但有例子表明这种图结构并非完全必要. 当然, 在实践中, 关键在于选择 $\{w(e)\}$, 这对于无穷的 E 更显重要. 下述变分公式是一例证.

定理 3.9. 设 $E=\{0,1,2,\cdots,N\}$, $N\leqslant\infty$, $q_{i,i+1}=b_i>0$ $(0\leqslant i\leqslant N-1)$, $q_{i,i-1}=a_i>0$ $(1\leqslant i\leqslant N)$ 且对其他的 $i\neq j$, $q_{ij}=0$. 以 $\mathscr{W}$ 表一切严格增序列 (w_i), $\sum\limits_{i=0}^{N}\mu_i w_i\geqslant 0$ 的全体并定义

$$I_i(w)=\frac{1}{b_i\mu_i(w_{i+1}-w_i)}\sum_{j=i+1}^{N}\mu_j w_j,\quad 0\leqslant i\leqslant N-1,$$

其中

$$\mu_0 = 1, \mu_n = b_0 \cdots b_{n-1}/a_1 \cdots a_n, \ 1 \leqslant n \leqslant N.$$

那么, $\lambda_1 = \sup_{w \in \mathscr{W}} \inf_{0 \leqslant i \leqslant N-1} I_i(w)^{-1}$.

证明 a) 回顾分布 (π_i) 由 $\pi_i = \mu_i/\mu, \mu := \sum_{j=0}^{N} \mu_j$ ($0 \leqslant i \leqslant N$) 所决定. 以 e_i 表边 $\langle i, i+1 \rangle$. 显然, 对于每一对 $i < j$, 存在唯一的路 (无圈), 它由 $e_i, e_{i+1}, \cdots, e_{j-1}$ 构成. 取 $w(e_i) = w_{i+1} - w_i$. 则 $|\gamma_{k\ell}|_w = (w_{k+1} - w_k) + \cdots + (w_\ell - w_{\ell-1}) = w_\ell - w_k$. 这样,

$$\begin{aligned}
\sum_{\{k,\ell\}: \gamma_{k\ell} \ni e_i} |\gamma_{k\ell}|_w \pi_k \pi_\ell &= \sum_{k=0}^{i} \sum_{\ell=i+1}^{N} \pi_k \pi_\ell (w_\ell - w_k) \\
&= \sum_{k=0}^{i} \pi_k \sum_{\ell=i+1}^{N} \pi_\ell w_\ell - \sum_{k=0}^{i} \pi_k w_k \sum_{\ell=i+1}^{N} \pi_\ell \\
&= \sum_{\ell=i+1}^{N} \pi_\ell w_\ell - \left(\sum_{k=i+1}^{N} \pi_k \right) \sum_{\ell=i+1}^{N} \pi_\ell w_\ell - \sum_{k=0}^{i} \pi_k w_k \sum_{\ell=i+1}^{N} \pi_\ell \\
&= \sum_{\ell=i+1}^{N} \pi_\ell w_\ell - \left(\sum_{k=i+1}^{N} \pi_k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{N} \pi_\ell w_\ell \right) \\
&\leqslant \sum_{\ell=i+1}^{N} \pi_\ell w_\ell, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1.
\end{aligned}$$

由定理 3.8, 证得把 “=” 换成 “$\geqslant$” 的断言.

为证明等式成立, 则要用到特征函数的一些性质, 因而要困难得多.

性质 1 设 $\lambda > 0$ 及 $g \neq 0$ 是方程 $\Omega g = -\lambda g$ 的解. 则 $g_0 \neq 0$ 且

$$\pi_n b_n (g_{n+1} - g_n) = -\lambda \sum_{i=0}^{n} \pi_i g_i, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N. \tag{3.4}$$

此处约定 $b_N = 0$ 如 $N < \infty$.

证明 约定 $a_0 = 0$ 及 $a_{N+1} = 0$ 如 $N < \infty$.

i) (3.4) 式由下式导出.

$$
\begin{aligned}
-\lambda\sum_{i=0}^{n}\pi_i g_i &= \sum_{i=0}^{n}\pi_i\Omega g(i) = \sum_{i=0}^{n}\big[\pi_i a_i(g_{i-1}-g_i)+\pi_i b_i(g_{i+1}-g_i)\big]\\
&= \sum_{i=0}^{n}\big[-\pi_i a_i(g_i-g_{i-1})+\pi_{i+1}a_{i+1}(g_{i+1}-g_i)\big]\\
&= -\pi_0 a_0(g_0-g_{-1})+\pi_{n+1}a_{n+1}(g_{n+1}-g_n)\\
&= \pi_n b_n(g_{n+1}-g_n).
\end{aligned}
$$

由于 $a_0=0$, g_{-1} 一项可略去.

ii) 若 $g_0=0$, 则由归纳法及 (9.2) 式导出 $g_i\equiv 0$. 这与假设相悖. □

性质 2 设 $\lambda_1>0$ 而 g 是方程 $\Omega g=-\lambda_1 g$ 的解, 满足 $g_0<0$. 则 g 严格单调上升.

证明 为方便, 置 $a_0=0$ 及 $b_N=0$ (如 $N<\infty$). 由所设条件及性质 1 知 $g_1>g_0$. 今假定存在某 n, $1\leqslant n\leqslant N-1$ 使得

$$g_0<g_1<\cdots<g_{n-1}<g_n\geqslant g_{n+1}. \tag{3.5}$$

我们证明这是不可能发生的.

由 (3.4) 得 $g_k<(\text{相应地}=)\,g_{k+1}\Longleftrightarrow\sum\limits_{i=0}^{k}\pi_i g_i<(\text{相应地}=)\,0$, $0\leqslant k\leqslant N-1$.

置 $\widetilde{g}_n=-\sum\limits_{i=0}^{n-1}\pi_i g_i/\pi_n$. 由 (3.4) 得出

$$g_k<(\text{相应地}=)\,g_{k+1}\Longleftrightarrow\sum_{i=0}^{k}\pi_i g_i<(\text{相应地}=)\,0.$$

由此及 (3.4) 和 (3.5) 导出

$$\sum_{i\leqslant n-1}\pi_i g_i+\pi_n\widetilde{g}_n=0, \tag{3.6}$$

$$g_n\geqslant\widetilde{g}_n=\frac{\pi_{n-1}b_{n-1}}{\lambda_1\pi_n}(g_n-g_{n-1})=\frac{a_n}{\lambda_1}(g_n-g_{n-1})>0. \tag{3.7}$$

取 $\overline{g}_i=g_iI_{[i<m]}+g_nI_{[i\geqslant n]}$. 则有

$$\sum_i\pi_i\overline{g}_i^2=\sum_{i\leqslant n-1}\pi_i g_i^2+g_n^2\sum_{i=n}^{N}\pi_i,$$

$$\sum_i\pi_i\overline{g}_i=\sum_{i\leqslant n-1}\pi_i g_i+g_n\sum_{i=n}^{N}\pi_i=g_n\sum_{i=n}^{N}\pi_i-\pi_n\widetilde{g}_n.\qquad(\text{由 (3.6)})$$

从而

$$\sum_i \pi_i \overline{g}_i^2 - \left(\sum_i \pi_i \overline{g}_i\right)^2 = \sum_{i\leqslant n-1} \pi_i g_i^2 + g_n^2 \sum_{i=n}^N \pi_i - \left(g_n \sum_{i=n}^N \pi_i - \pi_n \widetilde{g}_n\right)^2. \quad (3.8)$$

其次,

$$\begin{aligned} -\sum_i \pi_i (\overline{g}\Omega\overline{g})(i) &= \lambda_1 \sum_{i\leqslant n-1} \pi_i g_i^2 + \pi_n a_n g_n (g_n - g_{n-1}) \\ &= \lambda_1 \sum_{i\leqslant n-1} \pi_i g_i^2 + \lambda_1 \pi_n g_n \widetilde{g}_n. \qquad (\text{由 } (3.7)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

现在证明

$$\pi_n g_n \widetilde{g}_n < g_n^2 \sum_{i=n}^N \pi_i - \left(g_n \sum_{i=n}^N \pi_i - \pi_n \widetilde{g}_n\right)^2. \quad (3.10)$$

由 (3.7) 知, $g_n > 0$, 因而 (3.10) 等价于

$$\pi_n \frac{\widetilde{g}_n}{g_n} < \sum_{i=n}^N \pi_i - \left(\sum_{i=n}^N \pi_i - \pi_n \frac{\widetilde{g}_n}{g_n}\right)^2,$$

或

$$\left(\sum_{i=n}^N \pi_i - \pi_n \frac{\widetilde{g}_n}{g_n}\right)^2 < \sum_{i=n}^N \pi_i - \pi_n \frac{\widetilde{g}_n}{g_n}.$$

后一不等式成立是因为 $0 < \widetilde{g}_n \leqslant g_n$, $0 < \sum\limits_{i=n}^N \pi_i - \pi_n \widetilde{g}_n / g_n \leqslant \sum\limits_{i=n+1}^N \pi_i < 1$. 这证得 (3.10). 综合 (3.8)—(3.10) 得

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leqslant \frac{-\sum\limits_i \pi_i (\overline{g}\Omega\overline{g})(i)}{\sum\limits_i \pi_i \overline{g}_i^2 - \left(\sum\limits_i \pi_i \overline{g}_i\right)^2} \\ &= \frac{\lambda_1 \sum\limits_{i\leqslant n-1} \pi_i g_i^2 + \lambda_1 \pi_n g_n \widetilde{g}_n}{\sum\limits_{i\leqslant n-1} \pi_i g_i^2 + g_n^2 \sum\limits_{i=n}^N \pi_i - \left(g_n \sum\limits_{i=n}^N \pi_i - \pi_n \widetilde{g}_n\right)^2} < \lambda_1. \end{aligned}$$

导致矛盾. □

现在, 我们回到定理 3.9 的证明. 如 $\lambda_1 = 0$, 则前面的证明 a) 已表明等号必须成立. 以下总假定 $\lambda_1 > 0$.

b) 由性质 2, 可定义正数数列 $u_i = g_{i+1} - g_i$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$. 为方便计, 补定义 $u_N = 1$. 那么, 由特征方程 $\Omega g = -\lambda_1 g$ 得出

$$b_i u_i - a_i u_{i-1} = -\lambda_1 g_i \quad (a_0 := 0), \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1. \quad (3.11)$$

以 $i+1$ 代替 i 得出另一等式. 两等式相减得出

$$R_i(u) := (a_{i+1}u_i - b_{i+1}u_{i+1} - a_iu_{i-1} + b_iu_i)/u_i = \lambda_1 > 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1.$$

由 (3.4) 及性质 2 知, 存在有限极限 $c := \lim_{n\to\infty} \mu_n b_n u_n \geqslant 0$, 倘若 $N=\infty$. 否则 $c := \mu_N b_N u_N = 0$. 约定 $u_{-1}=0$. 由 (3.11) 及 g_i 的单调增性质, 我们有

$$\begin{aligned}\mu_n b_n u_n &= -\lambda_1 \sum_{i=0}^{n} \mu_i g_i \leqslant - \sum_{i\leqslant n: g_i<0} \mu_i g_i \\ &\leqslant -\lambda_1 g_0 \sum_{i\leqslant n: g_i<0} \mu_i \leqslant -\lambda_1 g_0 Z < \infty.\end{aligned}$$

从而 $c<\infty$, 进一步 $g \in L^1(\pi)$.

命 $w_i = a_iu_{i-1} - b_iu_i + c/(\mu-\mu_0) = \lambda_1 g_i + c/(\mu-\mu_0)$. 则

$$(w_{i+1}-w_i)/u_i = R_i(u) = \lambda_1 > 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1. \tag{3.12}$$

可见 w_i 严格单调上升. 另一方面, 由于

$$\begin{aligned}\sum_{j=i+1}^{N} \mu_j w_j &= \sum_{j=i+1}^{N} [\mu_j a_j u_{j-1} - \mu_j b_j u_j + c\mu_j/(\mu-\mu_0)] \\ &= \sum_{j=i+1}^{N} [\mu_{j-1} b_{j-1} u_{j-1} - \mu_j b_j u_j + c\mu_j/(\mu-\mu_0)] \\ &= \mu_i b_i u_i - c + \frac{c}{\mu-\mu_0} \sum_{j=i+1}^{N} \mu_j \\ &= b_i\mu_i u_i - \frac{c}{\mu-\mu_0} \sum_{1\leqslant j\leqslant i} \mu_j \leqslant b_i \mu_i u_i, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

特别地, $\sum_{j\geqslant 1}^{N} \mu_j w_j = \mu_0 b_0 u_0 > 0$ 且 $w \in L^1(\pi)$. 现在, 我们断言 $\sum_{j=i+1}^{N} \mu_j w_j > 0$ 对于一切 $0 \leqslant i \leqslant N-1$ 成立. 事实上, 如 $w_i \geqslant 0$, 则由 w 的单调性知所述结论已真. 否则, $w_i < 0 \Longrightarrow w_{i-1}, \cdots, w_1 < 0$, 从而更有 $\sum_{j=i+1}^{N} \mu_j w_j = \sum_{j=1}^{N} \mu_j w_j - \sum_{j=1}^{i} \mu_j w_j > 0$. 再由 $w_0 = -b_0u_0 + c/(\mu-\mu_0)$ 知, $\sum_j \mu_j w_j = w_0 + \sum_{j=1}^{N} \mu_j w_j = c/(\mu-\mu_0) \geqslant 0$. 因此, $w \in \mathscr{W}$. 综合以上事实得出

$$I_i(w)^{-1} = b_i\mu_i R_i(u) u_i \Big/ \sum_{j\geqslant i+1} \mu_j w_j \geqslant R_i(u) = \lambda_1, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1. \tag{3.14}$$

进而 $\inf_{0\leqslant i\leqslant N-1} I_i(w)^{-1} \geqslant \lambda_1$. 由此及已证的 a) 得出 $\inf_{0\leqslant i\leqslant N-1} I_i(w)^{-1} = \lambda_1$, 即等式可以达到. 此时, (3.14) 进而 (3.13) 中的等号必定成立. 这推出 $c=0$. □

同时, 我们还证出如下结果:

性质 3 对于性质 2 所给出的 g, 我们有 $\pi(g)=0$.

作为与指数遍历性的比较, 我们有如下结果, 其证明从略.

定理 3.10. 对于可逆马氏链, 指数遍历速度等于谱隙.

现在, 转入讨论一般 Markov 链的 Dirichlet 特征值. 固定一点, 例如 $0\in E$. 那么, Dirichlet 特征值定义为 $\lambda_0=\inf\{D(f,f): f(0)=0\ \text{且}\ \pi(f^2)=1\}$. 对于每一 $i\in E$, 选一条从 0 到 i 的路 (无圈) γ_i. 选一定义在边上的正的权函数 $\{w(e)\}$ 并命 $|\gamma_i|_w=\sum\limits_{e\in\gamma_i}w(e)$,

$$I(w)(e)=\frac{1}{a(e)w(e)}\sum_{i:\,\gamma_i\ni e}|\gamma_i|_w\pi_i.$$

定理 3.11. $\lambda_0\geqslant\sup\limits_w\inf\limits_e I(w)(e)^{-1}$.

证明

$$\begin{aligned}1&=\sum_i\pi_if_i^2=\sum_i\pi_i(f_i-f_0)^2=\sum_i\pi_i\left(\sum_{e\in\gamma_i}f(e)\right)^2\\&\leqslant\sum_i\pi_i\sum_{e\in\gamma_i}\frac{f(e)^2}{w(e)}|\gamma_i|_w=\sum_e a(e)f(e)^2I(w)(e)\\&\leqslant D(f,f)\sup_e I(w)(e).\qquad\square\end{aligned}$$

定理 3.12. 设 (a_i,b_i), (μ_i), $(I_i(w))$ 如定理 3.9 但改命 $\mathscr{W}$ 为一切满足 $w_0=0$ 的严格增系列 (w_i). 那么, $\lambda_0=\sup\limits_{w\in\mathscr{W}}\inf\limits_{0\leqslant i\leqslant N-1}I_i(w)^{-1}$.

当 $b_0=0$ 时, 若改定义

$$I_i(w)=\frac{1}{a_{i+1}\tilde{\mu}_{i+1}(w_{i+1}-w_i)}\sum_{j=i+1}^N\tilde{\mu}_jw_j,$$

此处 $\tilde{\mu}_1=1$, $\tilde{\mu}_n=b_1\cdots b_{n-1}/a_1\cdots a_n$, $n\geqslant2$, 则断言亦真.

证明 a) 依然设 e_i 为边 $\langle i,i+1\rangle$. 对于每一 $i\geqslant1$, 存在一条路, 它由 $e_0,e_1,\cdots,e_{i-1}$ 构成. 取 $w(e_i)=w_{i+1}-w_i$. 则

$$\sum_{k:\,\gamma_k\ni e_i}|\gamma_k|_w\pi_k=\sum_{k=i+1}^N(w_k-w_0)\pi_k=\sum_{k=i+1}^N\pi_kw_k.$$

现在, 由定理 3.11 即得 "$\lambda_0\geqslant\cdots$".

b) 本定理证明的余下部分类似于定理 3.9 证明的第二部分. 为完整起见, 依然给出细节. 设 $\lambda_0 > 0$ 且 $g \not\equiv 0$, $g_0 = 0$ 为方程 $\Omega g(i) = -\lambda_0 g_i\,(1 \leqslant i \leqslant N)$ 的一个解. 此处, 约定 $a_0 = 0$ 及 $b_N = 0$. 证明等式的关键是说明 (g_i) 的严格单调性. 一旦证出这一点, 不失一般性, 可假定 $g_i \uparrow$, 然后有

$$I_i(g) = \frac{1}{a_{i+1}\mu_{i+1}(g_{i+1} - g_i)} \sum_{j=i+1}^{N} \mu_j g_j \equiv \frac{1}{\lambda_0} \tag{3.15}$$

对于一切 $0 \leqslant i \leqslant N-1$ 成立, 因而得出所需断言.

c) 为证 (3.15) 成立, 先证

$$-\lambda_0 \sum_{1}^{n} \pi_i g_i = \pi_{n+1} a_{n+1}(g_{n+1} - g_n) - \pi_1 a_1 g_1, \qquad 1 \leqslant n \leqslant N \tag{3.16}$$

(此处约定 $a_{N+1} = 0$ 倘若 $N < \infty$), 这很容易证出:

$$\begin{aligned}
-\lambda_0 \sum_{1}^{n} \pi_i g_i &= \sum_{1}^{n} \pi_i \Omega g(i) = \sum_{1}^{n} \big[\pi_i a_i (g_{i-1} - g_i) + \pi_i b_i (g_{i+1} - g_i)\big] \\
&= \sum_{1}^{n} \big[-\pi_i a_i (g_i - g_{i-1}) + \pi_{i+1} a_{i+1} (g_{i+1} - g_i)\big] \\
&= \pi_{n+1} a_{n+1} (g_{n+1} - g_n) - \pi_1 a_1 g_1.
\end{aligned}$$

由此出发, 使用假设条件 $g_i \uparrow$ 并仿照定理 3.9 的证明 b), 可证出

$$\lim_{n \to N} \pi_{n+1} a_{n+1} (g_{n+1} - g_n) = 0.$$

综合此式与 (3.16) 得出 (3.15).

d) 现在回过头来证明 λ_0 的特征函数 (g_i) 的严格单调性. 由 (3.16) 知 $g_1 \neq 0$. 否则由数学归纳法导出 $g_i \equiv 0$, $i \geqslant 1$. 这样, 可假定 $g_1 > 0$. 今假定有某个 n: $1 \leqslant n \leqslant N-1$ 使得$0 = g_0 < g_1 < \cdots < g_{n-1} < g_n \geqslant g_{n+1}$. 定义 $\bar{g}_i = g_i I_{[i<n]} + g_n I_{[i \geqslant n]}$. 则有

$$\sum_i \pi_i \bar{g}_i^2 = \sum_{i \leqslant n-1} \pi_i g_i^2 + g_n^2 \sum_{i=n}^{N} \pi_i,$$

$$-\sum_i \pi_i (\bar{g}\Omega\bar{g})(i) = \lambda_0 \sum_{i \leqslant n-1} \pi_i g_i^2 + \pi_n a_n g_n (g_n - g_{n-1}).$$

注意到

$$\lambda_0 g_n = -\Omega g(n) = b_n (g_n - g_{n+1}) + a_n (g_n - g_{n-1}) \geqslant a_n (g_n - g_{n-1}),$$

有

$$\pi_n a_n g_n(g_n - g_{n-1}) \leqslant \lambda_0 \pi_n g_n^2 < \lambda_0 g_n^2 \sum_{i=n}^{N} \pi_i.$$

因此,

$$\lambda_0 \leqslant \frac{-\sum\limits_i \pi_i(\bar{g}\Omega\bar{g})(i)}{\sum\limits_i \pi_i \bar{g}_i^2} = \frac{\lambda_0 \sum\limits_{i\leqslant n-1} \pi_i g_i^2 + \pi_n a_n g_n(g_n - g_{n-1})}{\sum\limits_{i\leqslant n-1} \pi_i g_i^2 + g_n^2 \sum\limits_{i=n}^{N} \pi_i} < \lambda_0,$$

导致矛盾.

e) 至于定理的末项断言, 只需留意在上述证明 a)- d) 中, 并未用到 π_0 (注意 $g_0 = 0$) 和 b_0. 此外, 原来的 $I_i(w)$ 关于 (μ_i) 齐次. □

§3.3 附录：可逆马氏链的谱表示

设 $(p_{ij}(t))$ 为可逆马氏链, 即存在概率测度 $(\pi_i : i \in E)$ 使得

$$\pi_i p_{ij}(t) = \pi_j p_{ji}(t) \tag{3.17}$$

对于一切 i, j 和 $t \geqslant 0$ 成立. 由此导出

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}. \tag{3.18}$$

当 Q 过程唯一时, (3.17) 和 (3.18) 等价. 因为已有测度 (π_i) 在手, 自然考虑实平方可积函数的全体所构成的空间 $L^2(\pi)$. 不难证明 (3.17) 等价于

$$(P(t)f, g) = (f, P(t)g) \tag{3.19}$$

对一切 $f, g \in L^2(\pi)$ 和 $t \geqslant 0$ 成立, 此处 $(\cdot,\cdot)$ 为 $L^2(\pi)$ 中的通常内积而 $P(t) = (p_{ij}(t))$. 换言之, $P(t)$ 是 $L^2(\pi)$ 中的**自共轭算子** (如同有限维空间中的对称矩阵). 对于马氏链, 容易验证 $P(t)$ 在 $L^2(\pi)$ 中强连续:

$$\|P(t)f - f\| \to 0, \qquad 当 t \to 0,$$

此处 $\|\cdot\|$ 表 $L^2(\pi)$ 中的 L^2 范数. $P(t)$ 还是强压缩的: $\|P(t)f\| \leqslant \|f\|$ 对于一切 t 成立. 以 L 表 $P(t)$ 在 $L^2(\pi)$ 中的强无穷小算子.

定理 3.13 (谱表示定理). $P(t)$ 与 L 有如下表示:

$$P(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathrm{d}E_\lambda, \qquad L = \int_0^\infty -\lambda \mathrm{d}E_\lambda. \tag{3.20}$$

其中 $\{E_\lambda : \lambda \geqslant 0\}$ 是一族 $L^2(\pi)$ 上的单调上升的射影值测度, 即 $E_0 = 0, E_\infty = I$ (恒等算子), $\forall\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \mu \leqslant \infty, E_\lambda^2 = E_\lambda, E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$, 且对于每一 $f \in L^2(\pi)$, 关于变元 λ, $\phi(\lambda) := (E_\lambda f, f)$ 是 $[0,\infty)$ 上的有限测度.

详言之, 例如 (3.20) 的第一式意指

$$(P(t)f,g) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}(E_\lambda f, g), \qquad f,g \in L^2(\pi).$$

此处

$$(E_\lambda f, g) = \frac{1}{4}\big[(E_\lambda(f+g), f+g) - (E_\lambda(f-g), f-g)\big].$$

这样, 对于固定的 f 和 g, $(E_\lambda f, g)$ 是 $[0,\infty)$ 上的符号测度.

此定理乃谱理论的基本结果但初学者不易理解. 本附录的目的是力图解释如何导出 (3.20). 在讨论此问题之前, 让我们给出 (3.20) 的一条简单推论. 留意当 t 下降时, $(1-e^{-\lambda t})/t = t^{-1}\int_0^t e^{-\lambda s}\mathrm{d}s$ 上升. 极限

$$\left(\frac{f - P(t)f}{t}, f\right) \uparrow \text{某 } D(f,f) \leqslant +\infty, \quad \text{当 } t \downarrow 0 \tag{3.21}$$

总存在. (3.21) 式的右方称为过程 $P(t)$ 的**狄氏型** (Dirichlet 型). 如不使用谱理论 (即 (3.20) 式), 我们不知道如何证明 (3.21) 式所示的上升性质.

当然, 我们从最简单的情形开始. 设 E 为有限集. 此时, 过程 $P(t)$ 唯一并有如下简单表示:

$$P(t) = e^{tQ} = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}Q^n.$$

a) 无妨设 $E = \{0,1,2,\cdots,N\}$. 由 (3.17) 得

$$(f - P(t)f, f) = \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}\pi_i p_{ij}(t)(f_j - f_i)^2.$$

由此及 (3.21) 得到

$$D(f,f) = \frac{1}{2}\sum_{i,j\in E}\pi_i q_{ij}(f_j - f_i)^2 = (-Lf, f) \tag{3.22}$$

对于一切 $f \in L^2(\pi)$ 成立.

b) 由 (3.22) 可见, 算子 $-L$ 正定. 换言之, $(\pi_i q_{ij})$ 为一正定矩阵.

回忆在二次型或二次曲面的研究中, 我们总是将它化为标准型. 为此, 我们引进记号:

$\Pi = \mathrm{diag}\,(\pi_i)$ (具有对角线元素 π_i 的对角矩阵),

$A = \Pi^{1/2}Q\Pi^{-1/2}$,

$f = (f_i)$ (列向量).

注意 $\Pi Q = Q^*\Pi$, 由 (3.22) 得

$$\begin{aligned}(-Lf,f) &= -f^*\Pi Q f = -f^*\Pi^{1/2}(\Pi^{1/2}Q\Pi^{-1/2})\Pi^{1/2}f \quad (\text{因为 } L=Q)\\ &= -(\Pi^{1/2}f)^*(\Pi^{1/2}Q\Pi^{-1/2})(\Pi^{1/2}f) \\ &= -(\Pi^{1/2}f)^*A(\Pi^{1/2}f).\end{aligned} \tag{3.23}$$

由

$$\begin{aligned}A^* &= (\Pi^{1/2}Q\Pi^{-1/2})^* = \Pi^{-1/2}Q^*\Pi^{1/2} = \Pi^{-1/2}(\Pi Q)\Pi^{-1/2}\\ &= \Pi^{1/2}Q\Pi^{-1/2} = A,\end{aligned} \tag{3.24}$$

可见 A 对称. 于是存在正交矩阵 U 使得

$$-UAU^* = \operatorname{diag}(\lambda_i),$$

而 $0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N$ 为 $-A$ 的特征值.

c) 往证 A 与 Q 有相同的特征值. 这可由下式看出

$$\begin{aligned}Af = \rho f &\Longleftrightarrow \Pi^{1/2}Q\Pi^{-1/2}f = \rho f\\ &\Longleftrightarrow Q\Pi^{-1/2}f = \rho\Pi^{-1/2}f.\end{aligned}$$

现在, 由 $Q1 = 0 = 0\cdot 1$ 得出 $\lambda_0 = 0$. 实际上, 对于紧空间情形 $\lambda_1 > 0$. 称差 $\lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_1$ 为算子 L 的谱隙. 它即是前面所定义的 $\text{gap}(D)$.

d) 由 (3.23) 和 (3.24) 得出

$$\begin{aligned}(-Lf,f) &= -(\Pi^{1/2}f)^*A(\Pi^{1/2}f) = (\Pi^{1/2}f)^*U^*\operatorname{diag}(\lambda_i)U(\Pi^{1/2}f)\\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(U\Pi^{1/2}f)_i^2(\Pi^{1/2}f)_i^2.\end{aligned} \tag{3.25}$$

现在进入关键的一步. 定义在点 λ_k 具有负荷 $x_k := (U\Pi^{1/2}f)_k^2$ $(k=0,1,\cdots,N)$ 的有限测度 $F_f(\mathrm{d}\lambda)$. 则 (3.25) 可改写为

$$(-Lf,f) = \int_0^\infty \lambda F_f(\mathrm{d}\lambda).$$

此积分形式对于无限空间是必要的, 因为谱可能连续从而求和无意义. 此时正交变换 U 将改为所谓酉变换而算子 L 的定义域通常只是 $L^2(\pi)$ 的稠子集而非整个 $L^2(\pi)$.

此外, 我们有

$$F_f([0,\infty)) = \sum_{k=0}^N x_k^2 = \sum_{k=0}^N (U\Pi^{1/2}f)_k^2 = \sum_{k=0}^N \pi_k f_k^2 = \|f\|^2. \tag{3.26}$$

这解释了我们之所以使用对称矩阵 $A = \Pi^{1/2}Q\Pi^{-1/2}$ 而不用 ΠQ 的原因. 实际上, 如使用后者, 则得出 $F_f([0,\infty)) = \sum_k f_k^2$. 这对于无限空间无意义.

e) 其次, 由于 $U\Pi^{1/2}Q^n\Pi^{-1/2}U^* = \operatorname{diag}((-\lambda_i)^n)$, 如同证明 (3.25) 那样, 导出

$$(L^n f, f) = \int_0^\infty (-\lambda)^n F_f(\mathrm{d}\lambda).$$

由 d), 此式当 $n = 0$ 时亦真. 结合此式与前面的讨论 (于目前情况, $L = Q$), 我们得到

$$(P(t)f, f) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_f(\mathrm{d}\lambda). \tag{3.27}$$

f) 最后, 由 (3.26) 知 $F_f([0,\infty)) = \|f\|^2 < \infty$. 由 (3.27) 的启发, 自然定义测度值双线性型 $(E_\lambda f, g)$ 如次.

$$\mathrm{d}(E_\lambda f, f) := F_f(\mathrm{d}\lambda), \quad ([0,\infty) \text{ 上的测度})$$

$$(E_\lambda f, g) := \frac{1}{4}\big[(E_\lambda(f+g), f+g) - (E_\lambda(f-g), f-g)\big]. \quad (\text{符号测度})$$

简言之, 对于每固定的 f, $(E_\lambda f, f)$ 是一测度而对于每一集 $C \in \mathscr{B}([0,\infty))$, $\int_C \mathrm{d}(E_\lambda f, g)$ 是关于 f 和 g 的双线性型. 称 $\{E_\lambda : \lambda \geqslant 0\}$ 为算子 L 在 $L^2(\pi)$ 上的**谱族**. 这样, 我们已经得到了 (3.20). 我们特别指出, 对于无限空间, 有可能发生对于某些 $f \in L^2(\pi)$, $\int_0^\infty \lambda \mathrm{d}(E_\lambda f, f) = \infty$. 于是我们需要小心对待算子 L 的定义域. 无论如何, 有界算子情形依然是本质的, 因为无界情形可化为有界情形. 即上述定理也适用于无界算子.

§3.4 补充与习题

1. 设可逆马氏链 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 具有平稳分布 π, 则 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$.

2. 固定 $T > 0$, 定义 $Y_t = X_{T-t}$, 则

(a) $(Y_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是马氏链;

(b) $(Y_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 具有齐次的转移概率矩阵当且仅当 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 还是平稳的, 即过程 X_t 的分布 $m_i = \mathbb{P}[X_t = i]$ 与 t 无关. 此时 $(Y_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 的转移概率矩阵为 $p_{ij}^*(t) = m_j p_{ji}(t)/m_i$.

3. 证明生灭过程是可配称的, 给出配称测度. 并由此得到正常返的充要条件.

4. 由向前方程和向后方程有相同的最小非负解来证明定理 3.1.

5. 证明在 (3.25) 中, $(U\Pi^{1/2}f)(0) = \sum_i \pi_i f_i$.

6. 设 $E=\{0,1,\cdots,N\}$, 则

(a) $(-Lf,f)\geqslant\lambda_1(\|f\|^2-(\sum\limits_i\pi_if_i)^2)$;

(b) $(P(t)f,f)-(\sum\limits_i\pi_if_i)^2\leqslant e^{-\lambda_1t}(\|f\|^2-(\sum\limits_i\pi_if_i)^2)$.

7. 利用定理 3.9 给出下面的生灭过程的 λ_1 一个 "好的" 估计.

(a) $a_i=a,b_i=b$.

(b) $a_i=a,b_i=b/(i+1)$.

(c) $a_i=\delta i,b_i=\alpha i+\beta i$, 其中 $\delta>\beta$.

8. 设连续时间马氏链 $P(t)$ 具有平稳分布 π, 若 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_i\sum\limits_j|p_{ij}(t)-\pi_j|=0$, 则称 $P(t)$ 强遍历. 证明若 $P(t)$ 强遍历, 则存在 $C<\infty,\epsilon>0$, 使得

$$\sup_i\sum_j|p_{ij}(t)-\pi_j|\leqslant Ce^{-\epsilon t}.$$

可考虑如下的证明思路.

(a) 定义 $\phi(t)=\frac{1}{2}\sup\limits_i\sum\limits_j|p_{ij}(t)-\pi_j|$, 则 $\phi(t)\leqslant1,\phi(t+s)\leqslant\phi(t)\phi(s)$.

(b) 定义 $T=\inf\{t\geqslant0:\phi(t)\leqslant e^{-1}\}$, 则 $\phi(t)\leqslant\phi([t/T]t)\leqslant\phi(T)^{[t/T]}$.

9. 设 $(p_{ij}(t))$ 关于 π 可逆. 对 $H\subset E$, 令 $\widetilde{\pi}_i=\pi_i/(1-\pi(H)),i\notin H,\widetilde{\pi}(H)=0$. 那么 $(P(t)f,g)_{\widetilde{\pi}}=(f,P(t)g)_{\widetilde{\pi}}$.

10. 证明 (3.17) 等价于 (3.19), (3.18) 等价于$(Lf,g)=(f,Lg)$.

11. 如果 $\mathrm{gap}(D)>0$, 则马氏链指数遍历.

12. 对正则的 Q 过程 $Q=(q_{ij})$, 具有可逆测度 $\pi=(\pi_i)$, 则

$$\mathrm{gap}(D)\leqslant\inf\left\{\frac{\sum\limits_{i\in K,j\notin K}\pi_iq_{ij}}{\pi(K)\pi(K^c)}:0<\pi(K)<1\right\}.$$

13. (a) 称 $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是上可加函数, 如果 $\forall\ s,t>0,\phi(s+t)\geqslant\phi(s)+\phi(t)$. 证明极限 $\sigma=\lim\limits_{t\downarrow0}\phi(t)/t$ 存在且 $\sigma=\inf_{t>0}\phi(t)/t$.

(b) 令

$$\sigma(t)=-\sup\{\log\|P(t)f\|:\pi(f)=0,\|f\|=1\},$$

则 $\sigma(t)$ 为上可加函数, 从而极限 $\sigma=\lim\limits_{t\downarrow0}\sigma(t)/t$ 存在.

14. 设可数空间 E 上的连续时间马氏链 $P^{(i)}(t)$ 具有 Q 矩阵 $Q^{(i)}$, $i=1,2$. 考虑乘积空间 $E\times E$ 上的过程 $P(t)=(p_{(ij)(kl)}(t))$ 满足 $p_{(ij)(kl)}(t)=p_{ik}^{(1)}(t)p_{jl}^{(2)}(t)$.

(a) 证明 $P(t)$ 为马氏链, 并求出其 Q 矩阵,

(b) 证明 $\text{gap}(Q)=\text{gap}(Q^{(1)})\wedge\text{gap}(Q^{(2)})$,

(c) 相应 n 重乘积空间 E^n 上情形如何?

15. 证明

$$\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\frac{\lambda_0}{\pi_0}.$$

提示: 利用性质 $\text{Var}(f)=\pi(f^2)-\pi(f)^2=\inf\limits_{c\in\mathbb{R}}\pi((f-c)^2)$.

16. 令 (m_i) 和 (n_i) 为非负序列, 并满足

$$c:=\sup_{i>0}\sum_{j=0}^{i-1}n_j\sum_{j=i}^{\infty}m_j<\infty.$$

则对任意 $\gamma\in(0,1)$, 有 $\sum\limits_{j=i}^{\infty}\varphi_j^{\gamma}m_j\leqslant c(1-\gamma)^{-1}\varphi_i^{\gamma-1}$, 其中 $\varphi_k=\sum\limits_{j=0}^{k-1}n_j$.

17. (Hardy 不等式) 令

$$\delta=\sup_{n\geqslant1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\mu_jb_j}\sum_{i=n}^{\infty}\mu_i,$$

证明 $(4\delta)^{-1}\leqslant\lambda_0\leqslant\delta^{-1}$.

提示: 在上题中取 $\gamma=1/2, m_i=\mu_i, n_i=(\mu_ib_i)^{-1}$, 可以得到下界估计. 另一方面, 在 λ_0 的定义中取

$$f_i=\sum_{j=0}^{(i-1)\wedge(n-1)}\frac{1}{\mu_jb_j},$$

可以得到 $\lambda_0\leqslant\delta^{-1}$.

18. 设 μ,ν 为可数空间 E 上的符号测度, 则

(a) $\|\mu\times\nu\|_{\text{Var}}\leqslant\|\mu\|_{\text{Var}}+\|\nu\|_{\text{Var}}$; ($\|\cdot\|_{\text{Var}}$的定义见第二章题 32.) 并由此证明

(b) (接题 8 和题 14) $P(t)$ 强遍历当且仅当 $P^{(i)}(t)(i=1,2)$ 强遍历.

19. 设

$$Q=\begin{pmatrix}-3&1&2\\2&-4&2\\2&1&-3\end{pmatrix},$$

证明其转移概率矩阵为

$$P(t)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2+3e^{-5t} & 1-e^{-5t} & 2-2e^{-5t}\\ 2-2e^{-5t} & 1+4e^{-5t} & 2-2e^{-5t}\\ 2-2e^{-5t} & 1-e^{-5t} & 2+3e^{-5t}\end{pmatrix}.$$

从而 $P(t)$ 的极限分布为 $\pi=(2/5,1/5,2/5)$, 且

$$\sup_i\sum_j|p_{ij}(t)-\pi_j|=\frac{8}{5}e^{-5t}.$$

20. 设

$$Q=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

证明其转移概率矩阵 $P(t)$ 为

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}e^{-3t/2}R(t),$$

其中 $R(t)$ 如次

$$\begin{pmatrix}\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) & \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{2\pi}{3})\\ \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) & \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{2\pi}{3})\\ \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2})\end{pmatrix}.$$

从而 $P(t)$ 的极限分布为 $\pi=(1/3,1/3,1/3)$, 且

$$\frac{2}{3}e^{-3t/2}\leqslant\sup_i\sum_j|p_{ij}(t)-\pi_j|\leqslant\frac{4}{3}e^{-3t/2}.$$



第四章　一般马氏过程

§4.1　马氏性及其等价形式

自本节开始, 我们研究取值于一般状态空间的马氏过程.

定义 4.1. 称定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上、取值于可测空间 $(E, \mathscr{E})$ 中的随机过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为**马氏过程**, 如下述**马氏性**满足: 对于任何有限多个 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n < u$ 及 $A_u \in \mathscr{E}$,

$$\mathbb{P}[X_u \in A_u | X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}] = \mathbb{P}[X_u \in A_u | X_{t_n}]. \tag{4.1}$$

回忆条件化的定义, 对于任意的 $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2 \subset \mathscr{F}$,

$$\mathbb{E}[f|\mathscr{G}_1] = \mathbb{E}[f|\mathscr{G}_2] \Longleftrightarrow \int_\Lambda \mathbb{E}[f|\mathscr{G}_1] \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Lambda f \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \Lambda \in \mathscr{G}_2.$$

本节的目的是导出 (4.1) 的各种等价形式. 主要工具是测度论中的单调类定理.

命 $\mathscr{C}_t = \{[X_{t_1} \in A_{t_1}, \cdots, X_{t_n} \in A_{t_n}] : A_{t_k} \in \mathscr{E}, 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant t, n \geqslant 1\}$, 它是生成 σ 代数 $\mathscr{F}_t := \sigma(\mathscr{C}_t) = \sigma\{X_s : s \leqslant t\}$ 的 π 系. 由(4.1) 得出, 对于每 $B \in \mathscr{C}_t$, 无妨设 $B = [X_{t_1} \in A_{t_1}, \cdots, X_{t_n} \in A_{t_n}]$, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_B \mathbb{P}[X_u \in A_u | X_t] \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_B \mathbb{P}[X_u \in A_u | X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}, X_t] \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[I_{[X_u \in A_u]} \big| X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}, X_t\big] I_B\big] \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[I_{[X_u \in A_u]} I_B \big| X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}, X_t\big]\big] \\
&= \mathbb{E}[I_{[X_u \in A_u]} I_B].
\end{aligned}$$

于是使用集合形式的单调类定理, 得出

$$\mathbb{P}[X_u \in A_u | \mathscr{F}_t] = \mathbb{P}[X_u \in A_u | X_t], u > t. \tag{4.2}$$

然后使用函数形式的单调类定理, 可将示性函数 $I_{[X_u\in A_u]}$ 换成关于 $\sigma(X_u)$ 可测的可积函数:

$$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t] = \mathbb{E}[\xi|X_t], \qquad \xi \in \sigma(X_u),\ \mathbb{E}|\xi| < \infty. \tag{4.3}$$

上式中, 只考虑了关于 "将来" 的一个时刻 u. 随后我们将证明, 把它换成有限多个 "将来", 结论亦真.

$$\begin{aligned}&\text{对于任意有限多个 } t < u_1 < \cdots < u_m \text{ 及} A_k \in \mathscr{E},\\ &\mathbb{P}[X_{u_j} \in A_j, j = 1, 2, \cdots, m|\mathscr{F}_t] = \mathbb{P}[X_{u_j} \in A_j, j = 1, 2, \cdots, m|X_t].\end{aligned} \tag{4.4}$$

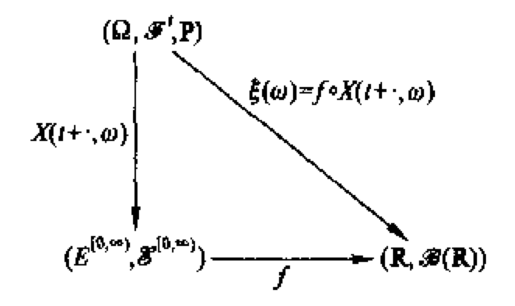
现在, 我们仿照 (4.1) $\Longrightarrow$ (4.2) $\Longrightarrow$ (4.3) 的步骤, 那里对 "过去" 的事件逐步加以扩充, 现在对 "将来" 的事件逐步加以扩充. 命 $\mathscr{C}^t = \{[X_{u_1} \in A_1, X_{u_2} \in A_2, \ldots X_{u_m} \in A_m] : u_m > u_{m-1} > \ldots > u_1 \geqslant t,\ A_k \in \mathscr{E},\ m \geqslant 1\}$, $\mathscr{F}^t = \sigma(\mathscr{C}^t) = \sigma\{X_u : u \geqslant t\}$. 使用单调类定理导出

$$\mathbb{P}[B|\mathscr{F}_t] = \mathbb{P}[B|X_t], \qquad B \in \mathscr{F}^t. \tag{4.5}$$

进而

$$\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t] = \mathbb{E}[\xi|X_t], \qquad \xi \in \mathscr{F}^t,\ \mathbb{E}|\xi| < \infty. \tag{4.6}$$

下面, 我们需要用到乘积空间上可测函数的表现定理.



即是: 对于给定的从 $(\Omega, \mathscr{F}^t, \mathbb{P})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 的可测映射 ξ, 必定存在从 $(E^{[0,\infty)}, \mathscr{E}^{[0,\infty)})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 的可测映射 f, 使得 ξ 是 f 和 $X(t+\cdot)$ 的复合. 这样, 由 (4.6) 得出

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[f \circ X(t+\cdot)|\mathscr{F}_t] = \mathbb{E}[f \circ X(t+\cdot)|X_t],\\ &\qquad f \in \mathscr{E}^{[0,\infty)},\ \mathbb{E}|f \circ X(t+\cdot)| < \infty.\end{aligned} \tag{4.7}$$

今设 $\xi \in \mathscr{F}^t, \eta \in \mathscr{F}_t$ 使得 ξ, η 和 $\xi\eta$ 均可积, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\xi\eta|X_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi\eta|\mathscr{F}_t]|X_t] = \mathbb{E}[\eta\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t]|X_t]\\ &= \mathbb{E}[\eta\mathbb{E}[\xi|X_t]|X_t] \quad (\text{由 } (4.7))\\ &= \mathbb{E}[\xi|X_t]\mathbb{E}[\eta|X_t].\end{aligned} \tag{4.8}$$

此式的优点在于 "过去" 和 "将来" 处于对称的地位.

现在可陈述本节的主要定理.

定理 4.2. (4.1)—(4.8) 相互等价.

证明 我们已经证得 (4.1) $\Longrightarrow$ (4.2) $\Longrightarrow$ (4.3) 及 (4.4) $\Longrightarrow$ (4.5) $\Longrightarrow$ (4.6) $\Longrightarrow$ (4.7) $\Longrightarrow$ (4.8). 因而只需再证 (4.3) $\Longrightarrow$ (4.4) 和 (4.8) $\Longrightarrow$ (4.1).

(4.3) $\Longrightarrow$ (4.4) 使用归纳法. 当 $m=1$ 时, (4.4) 即是 (4.3). 令 $B_1=[X_{u_1}\in A_1]$, $B_2=[X_{u_2}\in A_2,\cdots,X_{u_m}\in A_m]$. 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_{B_1B_2}|\mathscr{F}_t]&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[I_{B_1B_2}|\mathscr{F}_{u_1}]|\mathscr{F}_t]=\mathbb{E}[I_{B_1}\mathbb{P}[B_2|\mathscr{F}_{u_1}]|\mathscr{F}_t]\\&=\mathbb{E}[I_{B_1}\mathbb{P}[B_2|X_{u_1}]|\mathscr{F}_t]\quad(\text{归纳假设})\\&=\mathbb{E}[I_{B_1}\mathbb{P}[B_2|X_{u_1}]|X_t].\quad(\text{由 (4.3)})\end{aligned}$$

同样,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_{B_1B_2}|X_t]&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[I_{B_1B_2}|\mathscr{F}_{u_1}]|X_t]=\mathbb{E}[I_{B_1}\mathbb{P}[B_2|\mathscr{F}_{u_1}]|X_t]\\&=\mathbb{E}[I_{B_1}\mathbb{P}[B_2|X_{u_1}]|X_t].\end{aligned}$$

(4.8) $\Longrightarrow$ (4.1) 由 (4.8) 得出 $\mathbb{E}[\xi\eta|X_t]=\mathbb{E}[\eta\mathbb{E}[\xi|X_t]|X_t]$. 这样, 对于一切 $A\in\mathscr{E}$, 我们有

$$\int_{[X_t\in A]}\xi\eta\mathrm{d}\mathbb{P}=\int_{[X_t\in A]}\mathbb{E}[\eta|X_t]\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

特别地, 若取 $\xi=I_{[X_u\in A_u]}$, $\eta=I_{[X_{t_1}\in A_1,\cdots,X_{t_n}\in A_n]}$, 则

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[X_{t_1}\in A_1,\cdots,X_{t_n}\in A_n,X_t\in A,X_{t_u}\in A_u]\\&=\int_{[X_t\in A]}\xi\eta\mathrm{d}\mathbb{P}=\int_{[X_{t_1}\in A_1,\cdots,X_{t_n}\in A_n,X_t\in A]}\mathbb{P}[X_{t_u}\in A_u|X_t].\end{aligned}$$

此即是 (4.1). □

若对状态空间 $(E,\mathscr{E})$ 施加一点限制, 以保证正则条件概率存在, 则马氏过程必定有转移概率. 换言之, $\mathbb{P}[X_t\in A|X_s]$ 有正则修正 $p(s,x;t,A)$, 它是转移概率. 以下假定 $\mathscr{E}$ 包含一切单点集 $\{x\}$, $x\in E$.

定义 4.3. 称四元函数 $p(s,x;t,A)(t\geqslant s\geqslant 0,x\in E,A\in\mathscr{E})$ 为**转移函数**, 如果

(1) 对固定的 s,x,t, 它关于 A 是 $\mathscr{E}$ 上的概率测度;

(2) 对固定的 s,t,A, 它关于 x 是 $\mathscr{E}$ 可测函数;

(3) $p(s,x;s,\{x\})=1$;

(4) 它满足 Chapman-Kolmogorov 方程: 对任意的 $s \leqslant t \leqslant u$,

$$p(s,x;u,A) = \int_E p(s,x;t,\mathrm{d}y)p(t,y;u,A).$$

称之为**时齐的**, 如果 $p(s,x;t,A) = p(t-s,x,A)$.

对于给定的马氏过程, 记 $P_t(A) = \mathbb{P}[X_t \in A]$. 则由马氏性及归纳法易证它的有限维分布由下式给出.

对于任意有限多个 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ 及$A_k \in \mathscr{E}$,

$$\mathbb{P}[X_{t_k} \in A_k, k=1,\cdots,n] = \int_{A_0} P_{t_0}(\mathrm{d}x_0) \int_{A_1} p(t_0,x_0;t_1,\mathrm{d}x_1) \times \int_{A_2} p(t_1,x_1;t_2,\mathrm{d}x_2) \cdots \int_{A_n} p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,\mathrm{d}x_n). \tag{4.9}$$

等价地(可使用单调类定理证之), 对于任何 n 元非负可测函数 f, 有

$$\mathbb{E}[f(X_{t_0},X_{t_1},\cdots,X_{t_n})] = \int P_{t_0}(\mathrm{d}x_0) \int p(t_0,x_0;t_1,\mathrm{d}x_1) \int p(t_1,x_1;t_2,\mathrm{d}x_2) \cdots \int p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,\mathrm{d}x_n) f(x_0,x_1,\cdots,x_n). \tag{4.10}$$

反之, 对于给定的初分布 P_0 和转移概率 $p(s,x;t,A)$, 若一随机过程的有限维分布满足 (4.9), 则它必定是马氏的. 换言之, 马氏过程由初分布与转移概率完全决定.

下面给出取值于实直线 $\mathbb{R}$ 的一些马氏过程的例子.

例 4.4 (标准布朗运动). 转移概率密度是高斯核:

$$\varphi(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right].$$

它满足热方程 $\partial\varphi/\partial t = \frac{1}{2}\partial^2\varphi/\partial x^2$. 即对应于拉氏算子 $\frac{1}{2}\Delta$. 这里使用微分算子代替离散空间的 Q 矩阵.

例 4.5 (带漂移的布朗运动). 转移概率密度是:

$$p(t,x,y) = \varphi(\sigma^2 t, x+\mu t, y).$$

对应于向后方程 $\partial p/\partial t = \frac{1}{2}\sigma^2\partial^2 p/\partial x^2 + \mu\partial p/\partial x$.

例 4.6 (Ornstein-Uhlenbeck 过程, 简称 O.U. 过程). 转移概率密度是:

$$p(t,x,y) = \varphi(\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})/(2\alpha), xe^{-\alpha t}, y).$$

对应于向后方程 $\partial p/\partial t = \frac{1}{2}\sigma^2\partial^2 p/\partial x^2 - \alpha x\partial p/\partial x$.

这些过程均可配称, 而 O. U. 过程关于正态分布可逆.

连续时间马氏链的直接推广是如下的

例 4.7 (跳过程). 状态空间为 $(E,\mathscr{E})$. 假定 $\mathscr{E}$ 包含一切单点集. 代替 Q 矩阵, 使用 q 对 $(q(x),q(x,\mathrm{d}y))$, 其中 $q(x,\mathrm{d}y)$ 是非负可测核, $q(x)$ 为可测函数使得 $q(x,E)=q(x,E\setminus\{x\})\leqslant q(x)\leqslant\infty$. 全稳定、保守意指: $q(x)=q(x,E)<\infty$, $\forall x\in E$. 所谓**跳过程**, 乃是一转移概率 $p(t,x,\mathrm{d}y)$, 满足**跳条件**: $\lim\limits_{t\downarrow 0}p(t,x,\{x\})=1$, $\forall x\in E$. 这样, 与离散状态空间平行, 可以展开一套理论. 可参考 [5,10].

本节的主要定理也适用于离散时间参数的马氏过程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$. 作为例子, 我们有

例 4.8 (经济模型). 以 X_n 表第 n 年产出的产综所构成的列向量. 则 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是取值于 $\mathbb{R}^d$ 的马氏过程.

§4.2 强马氏性

本节讨论马氏过程理论中的一个核心问题: 强马氏性.

设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 上、取值于可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 中的随机过程. 记 $\mathscr{F}_t:=\sigma(X_s,s\leqslant t)$. 称此过程为**马氏过程**, 如它满足如下**马氏性**:

$$\mathbb{E}[f(X_{s+t})|\mathscr{F}_s]=\mathbb{E}[f(X_{s+t})|X_s]=:\mathbb{E}_{s,X_s}[f(X_{s+t})],\qquad t,\ s\geqslant 0. \tag{4.11}$$

换言之, 在已知 "现在" (一个固定时刻 s) 的条件下, "将来" 只依赖于 "现在" 而与 "过去" 无关. 假如我们要观测过程第一次达到 (首达) 某个状态或某个集合以后的发展行为, 把这个首达时间 T 视为 "现在", 那么此后过程的发展是否也只依赖于 "现在" 及现在所处的状态 X_T 而与过去无关. 换言之, 我们是否有

$$\mathbb{E}[f(X_{T+t})|\mathscr{F}_T]=\mathbb{E}[f(X_{T+t})|X_T]=\mathbb{E}_{T,X_T}[f(X_{T+t})],\qquad t\geqslant 0. \tag{4.12}$$

留意 T 是随机的. 当然, (4.12) 比 (4.11) 广得多. 我们把 (4.12) 称为**强马氏性**. 在历史上, 人们以为 (4.12) 是 (4.11) 的自然推论. 一直到 20 世纪 50 年代有人举出反例之后, 人们才对强马氏性引起足够的重视. 这里有两个问题. 首先, (4.12) 对何种 T 能够成立? 其次, σ 代数 $\mathscr{F}_T$ 该如何定义? 本节的目的是寻求这两个问题的解答. 这两个概念极为重要, 值得深入思考. 下面介绍一种思路, 可作为研究数学问题的一个小范例. 现在, 让我们考虑一种最基本的情况:即过程有时齐转移函数 $p(t,x,dy)$. 那么

$$\mathbb{E}_{s,X_s}[f(X_{s+t})]=\mathbb{E}_{0,X_s}[f(X_t)]=:\mathbb{E}_{X_s}[f(X_t)]=\int p(t,X_s,\mathrm{d}y)f(y).$$

因而马氏性 (4.11) 成为

$$\mathbb{E}[f(X_{s+t})|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}_{X_s}[f(X_t)].$$

而 (4.12) 成为

$$\mathbb{E}[f(X_{T+t})|\mathscr{F}_T] = \mathbb{E}_{X_T}[f(X_t)]. \tag{4.13}$$

先从简单的 T 开始:

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega, \quad a_i \geqslant 0.$$

此时, (4.13) 成立当且仅当

$$\int_A f(X_{T+t})\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}_{X_T} f(X_t)\mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad A \in \mathscr{F}_T.$$

但由马氏性,

$$\begin{aligned}\int_A \mathbb{E}_{X_T} f(X_t)\mathrm{d}\mathbb{P} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{AA_i} \mathbb{E}_{X_T} f(X_t)\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{n} \int_{AA_i} \mathbb{E}_{X_{a_i}} f(X_t)\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{AA_i} \mathbb{E}[f(X_{a_i+t})|\mathscr{F}_{a_i}]\mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned}$$

为把 AA_i 移入条件期望内, 即使用条件期望的平滑性, 需要 $AA_i \in \mathscr{F}_{a_i}$. 倘若如此, 我们就有

$$\begin{aligned}\text{上式右方} &= \sum_{i=1}^{n} \int \mathbb{E}\big[I_{AA_i} f(X_{a_i+t})|\mathscr{F}_{a_i}\big]\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big[I_{AA_i} f(X_{a_i+t})\big] \\ &= \mathbb{E}\left[I_A \sum_{i=1}^{n} I_{A_i} f(X_{a_i+t})\right] = \mathbb{E}\big[I_A f(X_{T+t})\big] = \int_A f(X_{T+t})\mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned}$$

从而导出 (4.13). 这样, 为使 (4.13) 成立, 只要

$$A \in \mathscr{F}_T \Longrightarrow AA_i = A \cap [T = a_i] \in \mathscr{F}_{a_i}, \qquad \forall i. \tag{4.14}$$

因为 $\mathscr{F}_T$ 是 σ 代数, $\Omega \in \mathscr{F}_T$. 在 (4.14) 中取 $A = \Omega$, 得出关于 T 的一个条件:

$$[T = a_i] \in \mathscr{F}_{a_i}.$$

由于 T 是离散的, 此条件等价于 $[T \leqslant a_i] \in \mathscr{F}_{a_i}$. 对于一般的 T, 因为 $[T = a_i]$ 常是零概集, 自然使用后一条件, 即 $[T \leqslant t] \in \mathscr{F}_t$.

定义 4.9. 设 $T:\Omega\to[0,+\infty]$. 如果对于一切 $t\geqslant 0$, 有 $[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t$, 那么称 T 是一个**停时** (或**可选时**, 或**不依赖于将来的随机变量**).

留意停时可取值 $+\infty$.

定理 4.10.

(1) 常值时间是停时.

(2) 若 T 是停时, $t\geqslant 0$, 则 $T+t$ 也是停时.

(3) 若 T_1、T_2 是停时, 则 T_1+T_2 也是停时.

(4) 若 T_1, T_2 是停时, 则 $T_1\vee T_2:=\max\{T_1,T_2\}$, $T_1\wedge T_2:=\min\{T_1,T_2\}$ 也是停时.

(5) 若 T_n 是停时, $T_n\uparrow T$, 则 T 也是停时.

(6) 若 T 是停时, 命

$$T_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^n}I_{[k/2^n<T\leqslant(k+1)/2^n]}+\infty I_{[T=\infty]}.$$

则 T_n 也是停时, 且 $T_n\downarrow T$.

证明 我们只证 (6). 对于每一个 $t\in[0,\infty)$, 我们有

$$[T_n\leqslant t]=\sum_{k:\,(k+1)/2^n\leqslant t}\left[\frac{k}{2^n}<T\leqslant\frac{k+1}{2^n}\right].$$

但

$$\left[\frac{k}{2^n}<T\leqslant\frac{k+1}{2^n}\right]=\left[T\leqslant\frac{k+1}{2^n}\right]\bigcap\left[T\leqslant\frac{k}{2^n}\right]^c\in\mathscr{F}_{\frac{k+1}{2^n}}\subset\mathscr{F}_t.$$

所以 $[T_n\leqslant t]\in\mathscr{F}_t$. □

注 4.11. 对于给定的 T, 通常的简单随机变量逼近系列取为

$$\widetilde{T}_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{[k/2^n\leqslant T<(k+1)/2^n]}+nI_{[T=\infty]}.$$

我们有 $\widetilde{T}_n\uparrow T$. 但

$$[\widetilde{T}_n\leqslant t]=\sum_{k/2^n\leqslant t}\left[\frac{k}{2^n}\leqslant T<\frac{k+1}{2^n}\right]=\sum_{k/2^n\leqslant t}\left[T<\frac{k+1}{2^n}\right]\bigcap\left[T<\frac{k}{2^n}\right]^c.$$

此集一般不属于 $\mathscr{F}_t$. 这表明: 对于一般的停时, 未必能从左方逼近.

现在来讨论我们的第二个问题: 如何定义 $\mathscr{F}_T$? 实际上, 在 (4.14) 中, 我们已经看到 $\mathscr{F}_T$ 中的元素 A 应满足条件: 对于一切 i, $A\cap[T=a_i]\in\mathscr{F}_T$. 而这等价于 $A\cap[T\leqslant a_i]\in\mathscr{F}_T$ 对于一切 i 成立. 对于一般的 (未必离散) 情形, 自然应定义

定义 4.12. 称 $\mathscr{F}_T:=\{A\in\mathscr{F}:\text{ 对于一切 } t\geqslant 0,\ A\cap[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t\}$ 为 T 前 σ 代数.

下述性质表明 $\mathscr{F}_T$ 不会太小, 它已满足我们的一个基本要求.

引理 4.13. $T\in\mathscr{F}_T$.

证明 对于每个 s, $t\geqslant 0$, 我们有

$$[T\leqslant s]\cap[T\leqslant t]=[T\leqslant t\wedge s]\in\mathscr{F}_{t\wedge s}\subset\mathscr{F}_t.$$

因而对于每一个 s, $[T\leqslant s]\in\mathscr{F}_T$. □

前面我们已经就简单的停时证明了强马氏性 (4.13). 对于一般的停时, 自然希望用简单停时来逼近.

先看 (4.13) 的左方. 我们希望

$$\mathbb{E}[f(X_{T_n+t})|\mathscr{F}_{T_n}]\to\mathbb{E}[f(X_{T+t})|\mathscr{F}_T],\qquad \text{当 } n\to\infty.$$

暂且忘掉条件化 "$|\mathscr{F}_T$" 并固定 t. 容易看出, 这要求 X_t 和 f 具有某种连续性. 至少两者都连续时应该是有希望的. 能不能再减弱一些呢? 关于 f, 假定它有界连续已经足够. 因为若 (4.13) 对于这种 f 成立, 那么, 由单调类定理, (4.13) 对于一切的有界可测函数也成立. 关于 X_t, 由于 $T_n\downarrow T$, 只要 X_t 右连续, 就有 $X_{T_n+t}\to X_{T+t}$.

再看 (4.13) 的右方. 固定 t. 我们要求

$$\mathbb{E}_{X_{T_n}}[f(X_t)]\to\mathbb{E}_{X_T}[f(X_t)],\quad \text{当 } n\to\infty,\qquad f\in C_b,$$

此处 C_b 表示一切有界连续函数的全体. 这要求 $\mathbb{E}_x f(X_t)$ 关于 x 连续. 但

$$\mathbb{E}_x f(X_t)=\int f(y)p(t,x,\mathrm{d}y)=:P(t)f(x).$$

于是, 上述条件可改说成: 对于一切的 $f\in C_b$, $P(t)f(x)$ 关于 x 连续 (必然有界).

定义 4.14. 设 $(E,\mathscr{E})$ 是一个距离可测空间. 称转移函数 $p(t,x,A)$ 是一个 **Feller 转移函数**, 如果对于每一个 $f\in C_b$ (一切有界连续函数的全体) 和每一个 $t\geqslant 0$, $P(t)f\in C_b$. 具有这样的转移函数的马氏过程称为 **Feller 过程**.

定义 4.15. 称齐次马氏过程 (X_t) 是**强马氏过程**, 如果

(1) 对于每一个停时 T, $X_T \in \mathscr{F}_T$;

(2) 对于每一个 $f \in {}_b\mathscr{E} :=E$ 上有界可测函数的全体,

$$\mathbb{E}[f(X_{T+t})|\mathscr{F}_T] = \mathbb{E}_{X_T}[f(X_t)] = P(t)f(X_T), \qquad t \geqslant 0, \tag{4.15}$$

此处 $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.

留意当 $T=\infty$ 时, X_T 无定义. 因此, 凡出现 X_T 时, 总理解为 $X_T I_{[T<\infty]}$.

现在, 我们可以陈述本节的主要定理.

定理 4.16. 右连续 Feller 过程是强马氏过程.

证明 a) 我们先证明可测性: $X_T \in \mathscr{F}_T$. 首先, 我们证明: 限于 $[T \leqslant t]$ 上, $(T(\omega),\omega)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F}_t)$ 到 $([0,t)\times\Omega, \mathscr{B}[0,t)\times\mathscr{F}_t)$ 的可测映射. 事实上, 对于每一个 $B\in\mathscr{B}[0,t)$ 和 $\Lambda\in\mathscr{F}_t$,

$$\left[(T(\omega),\omega)^{-1}(B\times\Lambda)\right]\cap[T\leqslant t] = [T\leqslant t]\cap T^{-1}(B)\cap\Lambda\in\mathscr{F}_t.$$

其次, 我们将在下述引理 4.18 中证明: $X_t(\omega)$ 是从 $([0,t)\times\Omega, \mathscr{B}[0,t)\times\mathscr{F}_t)$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 的可测映射.这样, 限于 $[T\leqslant t]$, X_T 作为 $(T(\omega),\omega)$ 和 $X(t,\omega)$ 的复合映射

$$(\Omega,\mathscr{F}_t) \longrightarrow ([0,t)\times\Omega, \mathscr{B}[0,t)\times\mathscr{F}_t) \longrightarrow (E,\mathscr{E}),$$

当然也是可测的.

b) 再证 (4.15). 取

$$T_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^n} I_{[k/2^n<T\leqslant(k+1)/2^n]} + \infty I_{[T=\infty]}.$$

则 T_n 是停时, 且 $T_n\downarrow T$. 为证 (4.15), 固定 $f\in C_b$. 只需证对每一个 $A\in\mathscr{F}_T$, 有

$$\int_A \mathbb{E}(f(X_{T+t})|\mathscr{F}_T)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A P(t)f(X_T)\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

即

$$\int_A f(X_{T+t})\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A P(t)f(X_T)\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

由 (X_t) 的右连续性和 Feller 性, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_A P(t)f(X_T)\mathrm{d}\mathbb{P} &= \lim_{n\to\infty}\int_A P(t)f(X_{T_n})\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{A\cap\{\frac{k}{2^n}<T\leqslant\frac{k+1}{2^n}\}} P(t)f\left(X_{\frac{k+1}{2^n}}\right)\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{A\cap\{\frac{k}{2^n}<T\leqslant\frac{k+1}{2^n}\}} \mathbb{E}\left[f\left(X_{\frac{k+1}{2^n}+t}\right)\Big|\mathscr{F}_{\frac{k+1}{2^n}}\right]\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\qquad (\text{由马氏性}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int \mathbb{E}\left[I_{A\cap\{\frac{k}{2^n}<T\leqslant\frac{k+1}{2^n}\}}f\left(X_{\frac{k+1}{2^n}+t}\right)\Big|\mathscr{F}_{\frac{k+1}{2^n}}\right]\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\qquad \left(A\in\mathscr{F}_T \Longrightarrow A\bigcap\left\{\frac{k}{2^n}<T\leqslant\frac{k+1}{2^n}\right\}\in\mathscr{F}_{\frac{k+1}{2^n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_A I_{A\cap\{\frac{k}{2^n}<T\leqslant\frac{k+1}{2^n}\}}f\left(X_{\frac{k+1}{2^n}+t}\right)\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_A I_{\{\frac{k}{2^n}<T\leqslant\frac{k+1}{2^n}\}}f\left(X_{\frac{k+1}{2^n}+t}\right)\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_A f(X_{T_n+t})\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A f(X_{T+t})\mathrm{d}\mathbb{P}. \qquad \square
\end{aligned}$$

定义 4.17. 称 (X_t) 是**适应**的, 如果对于每一个 $t\geqslant 0$, $X_t\in\mathscr{F}_t$. 称过程 (X_t) 是**循序可测**的, 如果对于每一个 $t\geqslant 0$, 它是从 $([0,t)\times\Omega, \mathscr{B}[0,t)\times\mathscr{F}_t)$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 的可测映射.

引理 4.18. 右连续适应过程是循序可测的.

证明 只需考虑如下逼近:

$$X_s^{(n)} = X_0 I_{[s=0[} + \sum_{k=1}^{2^n} X_{kt/2^n} I_{[(k-1)t/2^n<s\leqslant kt/2^n]}. \qquad \square$$

§4.3 附录: 最优停止问题——女秘书问题

本节通过一个具体问题来说明停时的重要性.

一个经理要从 N 个姑娘中雇佣一名秘书. 每次他会见一位姑娘, 见面之后就决定是否录用该姑娘. 在拒绝了一位之后, 就不再召见她了. 经理根据当前所见的姑娘与之前所见到的相比较的排名情况来决定是否录用她. 当然, 对于尚未见到的姑娘的情况他毫无所知. 问题是经理该如何做, 使得他选中这 N 位姑娘中最好的一位的概率最大?

把 N 个姑娘的综合评分依名次排列为 $\Omega := \{1, 2, \cdots, N\}$. 取 Ω 所有的排列 $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N)$, $\mathbb{P}[(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N)] = 1/N!$, $\mathscr{F} = \Omega$ 的一切子集的全体. 再记 $Y_n(\omega) = \#\{j : \omega_j \leqslant \omega_n\}$, 它表示第 n 个被接见者在前 n 个被召见者中的相对名次; $\mathscr{F}_n = \sigma\{Y_m : m \leqslant n\}$, 它表示至第 n 次接见时的全部信息. 于是, 问题化为: 寻求关于 $(\mathscr{F}_n)$ 的停时 T^*, 使得 $U := \mathbb{P}[\omega_{T^*} = 1] = \max\{\mathbb{P}[\omega_T = 1] : T$ 为停时$\}$.

然而, 一般的停时可能太复杂而并不实用. 因此, 我们限于如下一类停时: $T_r = \min\{n \geqslant r : Y_n = 1\}$, 它表示从第 r 次及之后召见时首次找到最优秀者的时刻. 我们的目的是要寻找 r^* 使得 $\mathbb{P}[\omega_{T_{r^*}} = 1] = \max\limits_{1 \leqslant r \leqslant N} \mathbb{P}[\omega_{T_r} = 1]$.

注意 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$ 相互独立, $\mathbb{P}[\omega_n = 1] = 1/N$, 而

$$\mathbb{P}[\omega_n = 1 | Y_n] = \begin{cases} 0, & \text{如 } Y_n \geqslant 2; \\ n/N, & \text{如 } Y_n = 1. \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\omega_{T_r} = 1] &= \sum_{n=r}^{N} \mathbb{P}[\omega_n = 1, T_r = n] \\
&= \sum_{n=r}^{N} \sum_{j_r, \cdots, j_{n-1} \neq 1} \mathbb{P}[\omega_n = 1, Y_r = j_r, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = 1] \\
&= \sum_{n=r}^{N} \sum_{j_r, \cdots, j_{n-1} \neq 1} \mathbb{P}[Y_r = j_r, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = 1] \\
&\qquad \cdot \mathbb{P}[\omega_n = 1 | Y_r = j_r, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = 1] \\
&= \sum_{n=r}^{N} \frac{r-1}{r} \cdot \frac{r}{r+1} \cdot \cdots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{N} \\
&= \frac{r-1}{N} \sum_{n=r}^{N} \frac{1}{n-1} =: \varphi(r).
\end{aligned}$$

由于

$$\varphi(r) - \varphi(r+1) = \frac{1}{N}\left(1 - \sum_{n=r}^{N-1} \frac{1}{n}\right),$$

$\varphi(r)$ 在 r^* 处达到最大值:

$$\begin{aligned}
r^* = r^*(N) &= \inf\{r : \varphi(r) - \varphi(r+1) \geqslant 0\} \\
&= \inf\left\{r : \sum_{n=r}^{N-1} \frac{1}{n} \leqslant 1\right\}.
\end{aligned}$$

使用积分代替求和, 得出 $\lim\limits_{N \to \infty} N^{-1} r^*(N) = e^{-1}$.

定理 4.19. 当 N 充分大时, 女秘书问题的最优解是 $r^*(N)/N \approx e^{-1} \approx 0.37$.

§4.4　补充与习题

1. 设 $\Omega=\{1,2,3\}$, $\mathscr{F}$ 为 Ω 的所有子集类, $(\Omega,\mathscr{F})$ 上有概率测度 $\mathbb{P}\{i\}=p_i$. 令 $\mathscr{G}=\sigma\{\{1,2\},\{3\}\}$, $X(i)=i$, 则 X 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(\mathbb{R},\mathscr{B})$ 的随机变量, 但 X 关于 $\mathscr{G}$ 不可测. 求出 $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$.

2. 证明定理 4.10 中的结论 (1)　(5).

3. 若 T 是停时, 则 $[T<t]\in\mathscr{F}_t$, $[T=t]\in\mathscr{F}_t$.

4. (a) 若 T 是停时, 证明 $\mathscr{F}_T$ 是 σ 代数.

   (b) 当 $T\equiv t$ 时, $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$.

   (c) 若停时 $S\leqslant T$, 则 $\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$.

5. 设 T_1,T_2 为停时, 则 $\{T_1<T_2\},\{T_1>T_2\}$, $\{T_1\leqslant T_2\}$, $\{T_1\geqslant T_2\}$ 以及 $\{T_1=T_2\}$ 都属于 $\mathscr{F}_{T_1}\cap\mathscr{F}_{T_2}$, 而且 $\mathscr{F}_{T_1}\cap\mathscr{F}_{T_2}=\mathscr{F}_{T_1\wedge T_2}$.

6. 证明 $I_{[T\geqslant S]}\mathbb{E}[X_T|X_S]=I_{[T\geqslant S]}\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_{S\wedge T}]$, a.s.

7. 离散时间马氏链是强马氏链.

8. 设 $(X_n)_{n\geqslant0}$ 为状态空间 E 上常返的马氏链. 固定 E 的子集 F, 令

$$T_1=\inf\{n\geqslant0:X_n\in F\},T_{k+1}=\inf\{n>T_k:X_n\in F\}.$$

   证明 $X_{T_1},X_{T_2},\cdots$ 是 F 上的马氏链, 并求其转移矩阵.

9. (Wald 等式) 设 $X_1,X_2,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列, 且 $E|X_1|<\infty$. N 为一停时. 则

$$E(X_1+\cdots+X_N)=E(N)E(X_1).$$

10. Q 过程具有强马氏性.

11. 考虑 Q 过程 $(X_t)_{t\geqslant0}$, 令 $\tau_j=\inf\{t\geqslant0:X_t=j\}$. 记

$$F_{ij}(t)=\mathbb{P}_i[\tau_j\leqslant t].$$

   则

$$P_{ij}(t)=\int_0^t P_{jj}(t-s)\mathrm{d}F_{ij}(s)=\int_0^t P_{ij}(t-s)\mathrm{d}F_{jj}(s).$$

12. 若 $f(t,x)$ 是 (t,x) 的可测函数, 则 $f(t,X(t,\omega))$ 为循序可测的.

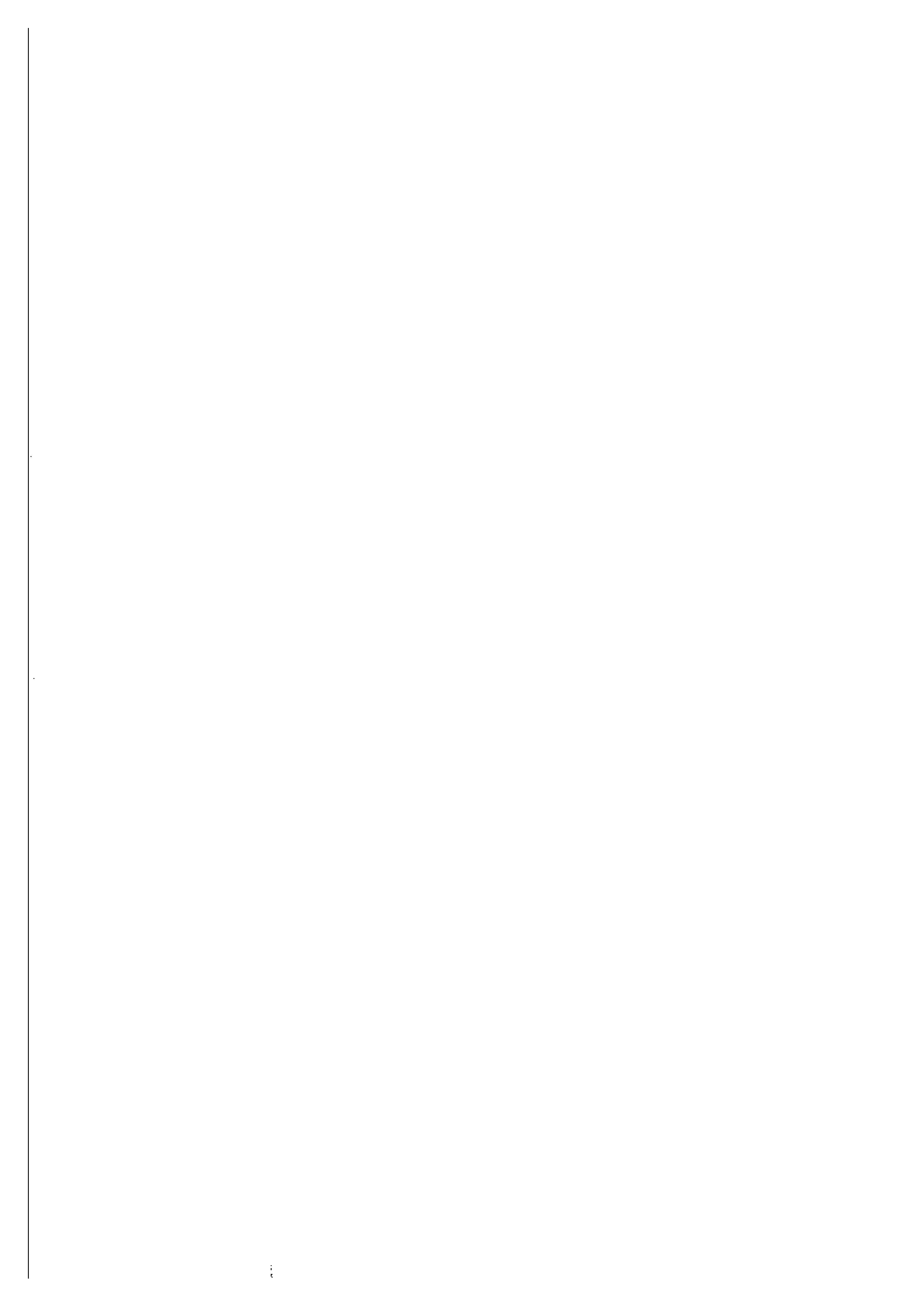
13. 证明高斯核

$$\varphi(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right]$$

   满足热方程 $\partial\varphi/\partial t=\dfrac{1}{2}\partial^2\varphi/\partial x^2$.

第二篇

随 机 分 析



第五章　鞅　　论

§5.1　定义及基本性质

记 $\mathbb{T}=\{0,1,2,\cdots\}=\mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{T}=[0,\infty)$. 再记 $\overline{\mathbb{T}}=\mathbb{T}\cup\{+\infty\}$. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 为概率空间, $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为上升 σ域流: 如 $s\leqslant t$, 则 $\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$. 命 $\mathscr{F}_\infty=\bigvee_t\mathscr{F}_t:=\sigma\big(\bigcup_t\mathscr{F}_t\big)$.

定义 5.1. 称随机变量 (r.v.) 族 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ **适应**, 如 $\forall t\in\mathbb{T}$, $X_t\in\mathscr{F}_t$. 如再设 $\forall t\in\mathbb{T}$, X_t 可积且对 $s\leqslant t$,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s]=(\leqslant,\geqslant)X_s,\qquad \text{a.s.}\tag{5.1}$$

则称 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 为**鞅** (**上**、**下鞅**). 称 $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{T}}}$ 为**闭鞅** (**闭上**、**下鞅**), 如果 (5.1) 成立且对 $t\in\mathbb{T}$,

$$\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t]=(\leqslant,\geqslant)X_t,\qquad \text{a.s.}\tag{5.2}$$

X_∞ 称为**右闭元**.

简单地说, 下鞅的条件平均值单调增.

如 (X_t) 为下鞅, 则 $(-X_t)$ 为上鞅. 因此, 关于上鞅的性质大多可由关于下鞅的性质对偶地得到. 这样, 以后常常只讨论下鞅.

引理 5.2 (简单性质).

(1) 鞅对线性运算 $\big(\alpha_1X_t^{(1)}+\alpha_2X_t^{(2)},\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\big)$ 封闭.

(2) 上 (下) 鞅对锥射运算 $\big(\alpha_1X_t^{(1)}+\alpha_2X_t^{(2)},\ \alpha_1,\alpha_2\geqslant 0\big)$ 封闭.

(3) 下鞅的上端为下鞅.

(4) 鞅的凸函数为下鞅. 设 (X_t) 为鞅, f 为 $\mathbb{R}$ 上的凸函数; $\forall t\in\mathbb{T}$, $f(X_t)$ 可积 $\Longrightarrow(f(X_t))_{t\in\mathbb{T}}$ 为下鞅. 例: $f(x)=|x|^\alpha$, $\alpha\geqslant 1$.

(5) 下鞅的非减凸函数为下鞅. 设 (X_t) 为下鞅, f 为 $\mathbb{R}$ 上的非减凸函数; $\forall t \in \mathbb{T}$, $f(X_t)$ 可积 $\Longrightarrow$ $(f(X_t))_{t\in\mathbb{T}}$ 为下鞅. 例: $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \geqslant 1, x \geqslant 0$; $f(x) = x^+ = x \vee 0$.

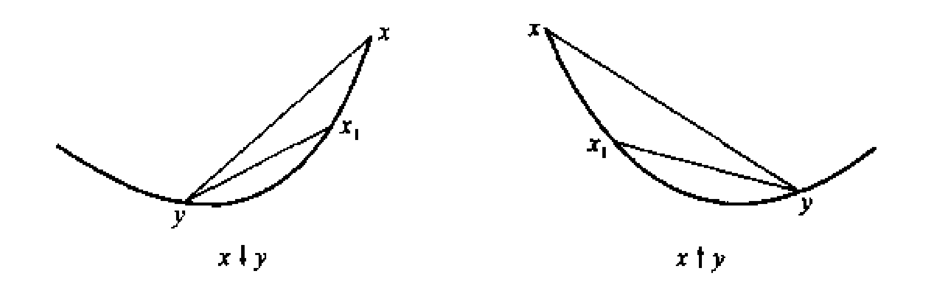
证明 (4) 由凸性, $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leqslant \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$. 一般地, $f(\sum_i \lambda_i x_i) \leqslant \sum_i \lambda_i f(x_i)$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$.

$$\begin{aligned} f(X_s) &= f\big(\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s]\big) \quad (\text{由鞅性}) \\ &\leqslant \mathbb{E}\big[f(X_t)|\mathscr{F}_s\big] \quad (\text{由凸性及 Jensen 不等式}). \end{aligned}$$

(5) 只需把上证第一个 "=" 改为 "$\leqslant$". □

另证 (4) 使用条件期望的 Jensen 不等式. 注意对任一凸函数 f, 我们有

$$f(x) - f(y) \geqslant f'_+(y)(x-y),$$



此处 f'_+ 为右导数. 因而

$$\begin{aligned} &f(X) - f(\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]) \geqslant f'_+(\mathbb{E}[X|\mathscr{G}])(X - \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]) \\ &\Longrightarrow \mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}] - f(\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]) \geqslant 0. \end{aligned}$$

但此处有一个可积性问题. 以 $XI_{[|\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]|\leqslant N]}$ 代替 X, 然后命 $N \uparrow \infty$. 最后再取条件化. □

§5.2 Doob 停止定理

如同把马氏性换成强马氏性那样, 我们也期望把鞅性换成 "强鞅性". 先看一简单情形.

引理 5.3. 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为鞅 (下鞅), S, T 为有界停时, $S \leqslant T$, 则 X_S 和 X_T 可积且

$$\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S] = (\geqslant) X_S.$$

证明 记 $N=\sup_{\omega} T(\omega)<\infty$. 则由 $\mathbb{E}|X_T| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}|X_n|$ 知 X_T 可积. 以下只针对下鞅给出证明.

先假定 $0\leqslant T-S\leqslant 1$. 若 $A\in\mathscr{F}_S$, 则 $A[S=j][T=j+1]=A[S=j][T>j]\in\mathscr{F}_j$, 从而

$$\int_A (X_T-X_S)=\sum_{j=0}^{N}\int_{A[S=j][T>j]}(X_{j+1}-X_j)\geqslant 0. \quad (\text{由下鞅性})$$

一般情形, 令 $R_j=T\wedge(S+j)$, $j=0,1,2,\cdots,N$. 则 R_j 均为停时, $0\leqslant R_{j+1}-R_j\leqslant 1$, $R_0=S$, $R_N=T$. 由于

$$A\in\mathscr{F}_S \Longrightarrow A\in\mathscr{F}_{R_j}, \qquad j=1,\cdots,N,$$

故由上面所证

$$\int_A X_S=\int_A X_{R_0}\leqslant\int_A X_{R_1}\leqslant\cdots\leqslant\int_A X_{R_N}=\int_A X_T. \qquad \square$$

定理 5.4 (Doob 停止定理). 记 $\overline{\mathbb{N}}=\{0,1,2,\cdots\}\cup\{+\infty\}$. 设 $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ 为闭鞅 (闭下鞅), S,T 为停时, $S\leqslant T$. 则 X_S 和 X_T 可积且

$$\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]=(\geqslant)X_S.$$

证明 a) 先看鞅情形. 对于任一停时 R, 由

$$\mathbb{E}|X_R|=\sum_{0\leqslant n\leqslant\infty}\int_{[R=n]}|X_n|\leqslant\sum_{0\leqslant n\leqslant\infty}\int_{[R=n]}|X_\infty|=\mathbb{E}|X_\infty|<\infty$$

得出 X_T 和 X_S 的可积性. 倒数第二步用到鞅的绝对值为下鞅. 但下鞅情形就不对了.

任给 $A\in\mathscr{F}_R$, 则

$$\int_A X_R=\sum_{0\leqslant n\leqslant\infty}\int_{A[R=n]}X_n=\sum_{0\leqslant n\leqslant\infty}\int_{A\cap[R=n]}X_\infty=\int_A X_\infty.$$

可见 $X_R=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_R]$. 进而注意到 $\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$, 则

$$X_S=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_S]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_T]|\mathscr{F}_S]=\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S].$$

b) 往证下鞅情形. 命

$$Y_n=\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_n]-X_n\geqslant 0.$$

易见 $(Z_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_n])_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ 为鞅 (这是由可积随机变量所生成的最简单的鞅). 由已证的 a) 知, 关于 (Z_n) 的 Doob 停止定理成立. 因此, 关于 $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ 的停止定理等价于关于 $(Y_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}(\mathscr{F}_\infty = \bigvee_n \mathscr{F}_n)$ 的停止定理. 但 $(Y_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ 是非负上鞅且 $Y_\infty = \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_\infty] - X_\infty = 0$. 这样, 问题归结为对这个非负上鞅证明 Doob 停止定理. 首先, 对任一停时 R, 我们有

$$Y_R = Y_R I_{[R<\infty]} + Y_\infty I_{[R=\infty]} = Y_R I_{[R<\infty]}, \tag{5.3}$$

此处用到 $Y_\infty = 0$. 因而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y_R &= \mathbb{E}\Big(\lim_{n\to\infty} Y_{R\wedge n} I_{[R\leqslant n]}\Big) \leqslant \mathbb{E}\Big(\lim_{n\to\infty} Y_{R\wedge n}\Big)\\ &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_{R\wedge n} \quad (\text{由非负性使用 Fatou 引理})\\ &\leqslant \mathbb{E}Y_0 < \infty. \quad (\text{应用引理 5.3 于非负上鞅 } (Y_n)\ )\end{aligned}$$

这表明 $0 \leqslant \mathbb{E}Y_R < \infty$, 从而 $X_R = \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_R] - Y_R$ 可积. 其次, 命 $T_n = T\wedge n$, $S_n = S\wedge n$, 并设 $A\in\mathscr{F}_S$. 则由 $A[S\leqslant n]\in\mathscr{F}_{S_n}$ 及引理 5.3 得

$$\int_{A[S\leqslant n]} Y_{S_n} \geqslant \int_{A[S\leqslant n]} Y_{T_n} \geqslant \int_{A[T\leqslant n]} Y_{T_n}.$$

从而

$$\int_{A[T\leqslant n]} Y_T \leqslant \int_{A[S\leqslant n]} Y_S.$$

命 $n\uparrow\infty$, 由 (5.3) 得出 $\int_A Y_T \leqslant \int_A Y_S$. □

推论 5.5. 设 $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{Z}}_+}$ 为鞅 (下鞅), S, T 为停时, 则 $\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S] = (\geqslant) X_{S\wedge T}$.

证明 由定理 5.4 知, $\mathbb{E}[X_{T\vee S}|\mathscr{F}_S] = X_S$. 因而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S] &= \mathbb{E}\big[X_T I_{[T\leqslant S]} + X_{T\vee S} I_{[T>S]}|\mathscr{F}_S\big]\\ &= X_T I_{[T\leqslant S]} + X_S I_{[T>S]}\\ &= X_{S\wedge T}. \quad \square\end{aligned}$$

推论 5.6. 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为鞅 (下鞅), 则 $(X_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ 关于 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅 (下鞅).

证明 考虑 $n\leqslant m$. 因 $(X_k)_{k\leqslant m}$ 有右闭元, 由推论 5.5 得出

$$\mathbb{E}[X_{m\wedge T}|\mathscr{F}_n] = X_{n\wedge(m\wedge T)} = X_{n\wedge T}, \qquad n\leqslant m. \qquad \square$$

§5.3 基本不等式

先研究下鞅的极值分布的估计.

定理 5.7. 设 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 为下鞅, $\lambda>0$. 则

(1) $\lambda\mathbb{P}\big[\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}X_k\geqslant\lambda\big]\leqslant\int_{\big[\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}X_k\geqslant\lambda\big]}X_n\leqslant\mathbb{E}X_n^+\leqslant\mathbb{E}|X_n|$;

(2) $\lambda\mathbb{P}\big[\min\limits_{0\leqslant k\leqslant n}X_k\leqslant-\lambda\big]\leqslant-\mathbb{E}X_0+\int_{\big[\min\limits_{0\leqslant k\leqslant n}X_k>-\lambda\big]}X_n\leqslant\mathbb{E}X_n^+-\mathbb{E}X_0\leqslant\mathbb{E}|X_0|+\mathbb{E}|X_n|$;

(3) $\lambda\mathbb{P}\big[\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|\geqslant\lambda\big]\leqslant 2\mathbb{E}X_n^+-\mathbb{E}X_0\leqslant 2\mathbb{E}|X_n|+\mathbb{E}|X_0|$.

证明 记 $X_n^*=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}X_k$, $\Lambda=[X_n^*\geqslant\lambda]$. 令

$$T=\begin{cases}\min\{k:k\leqslant n,\ X_k\geqslant\lambda\};\\ n,\quad \text{如上面的集合}=\varnothing.\end{cases}$$

则 T 为停时且 $T\leqslant n$. 由于

$$\Lambda[T=k]=[X_j<\lambda,0\leqslant j<k,X_k\geqslant\lambda]\in\mathscr{F}_k$$
$$\Longrightarrow\Lambda\in\mathscr{F}_T,$$

因此, 对停时 T 和 n 使用 Doob 停止定理得出

$$\int_\Lambda X_n^+\geqslant\int_\Lambda X_n\geqslant\int_\Lambda X_T\geqslant\lambda\mathbb{P}(\Lambda).\quad(\text{因为在 }\Lambda\text{ 上必有}X_T\geqslant\lambda)$$

此即是 (1).

将上述证明中对 n,T 使用 Doob 停止定理改为: 对 $T,0$ 使用 Doob 停止定理, 类似来证明 (2). 再令 $\Lambda=\big[\min\limits_{0\leqslant k\leqslant n}X_k\leqslant-\lambda\big]$ 及 $T=\min\{0\leqslant k\leqslant n:X_k\leqslant-\lambda\}$; $=n$ 若此集合空.

$$\mathbb{E}X_0\leqslant\mathbb{E}X_T=\int_\Lambda X_T+\int_{\Lambda^c}X_T\leqslant-\lambda\mathbb{P}(\Lambda)+\int_{\big[\min\limits_{0\leqslant k\leqslant n}X_k>-\lambda\big]}X_n.$$

由 (1) 和 (2) 立即得出 (3). □

注 5.8. 对于无限情形, 定理 5.7 的相应结论成立. 例如上述的 (1) 成为

$$\lambda\mathbb{P}\big[\max_{1\leqslant k<\infty}X_k\geqslant\lambda\big]\leqslant\sup_n\mathbb{E}X_n^+.$$

证明 由 (1) 得 $\lambda\mathbb{P}\big[\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}X_k\geqslant\lambda\big]\leqslant\mathbb{E}X_n^+$. 由于当 $n\uparrow$ 时, $X_n^*=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}X_k\uparrow$, $I_{[\lambda,\infty)}(f_n)\uparrow I_{[\lambda,\infty)}(f_\infty)$, 使用单调收敛定理得出

$$\lambda\mathbb{P}\big[\max_{1\leqslant k<\infty}X_k\geqslant\lambda\big]\leqslant\sup_n\mathbb{E}X_n^+.\qquad\square$$

推论 5.9 (Kolmogorov 不等式). 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为鞅. $\forall n$, $X_n \in L^p\,(p\geqslant 1)$, 即

$$\int |X_n|^p < \infty, \quad \| X_n \|_p := \| X_n \|_{L^p} := \left(\int |X_n|^p\right)^{1/p}.$$

则 $\forall n$,

$$\mathbb{P}\Big[\max_{0\leqslant k\leqslant n} |X_k| \geqslant \lambda\Big] \leqslant \mathbb{E}|X_n|^p/\lambda^p.$$

证明 (X_n) 是鞅 $\Longrightarrow$ $(|X_n|^p)$ 是下鞅. 然后应用定理 5.7. □

今设 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 独立同分布 (i.i.d.), $\forall n$, $\mathbb{E}X_n = 0$, $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$. 取 $\mathscr{F}_n = \sigma(X_k : k\leqslant n)$. 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_{n+1}|\mathscr{F}_n]\\ &= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]\\ &= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] \quad (\text{独立性})\\ &= S_n. \quad (\text{零均值})\end{aligned}$$

所以 $(S_n, \mathscr{F}_n)$ 是鞅, 进而 $(|S_n|^2)$ 是下鞅. 故

$$\mathbb{P}\Big[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \lambda\Big] \leqslant \lambda^{-2}\mathbb{E}S_n^2.$$

这是经典的 Kolmogorov 不等式 (1929). K. L. Chung (钟开莱) 在他的教程 ([17]) 中称它是一个卓越的不等式, 它的早先的证明是概率论真正的精湛技巧的典范.

鞅 (上、下鞅) 的重要性并不能完全归因于它是来源于实际的随机过程. 换言之, 并不在于它对实际的直接应用, 而主要在于它的简明的特性, 使之成为一种重要的理论研究工具. 另一方面, 从上例可以看出, 如何由原先的随机过程 (i.i.d. (X_n)) 找出某种鞅刻画, 乃是应用的关键, 以后还会谈到.

下述结果给出非负下鞅极大值的矩.

定理 5.10 (Doob 不等式). 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为非负下鞅, $X_n^* = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} X_k$. 再设 φ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的右连续函数, $\varphi(0) = 0$. 则

$$\mathbb{E}\varphi(X_n^*) \leqslant \mathbb{E}\left[X_n \int_0^{X_n^*} \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\varphi(\lambda)\right].$$

特别地,

$$\|X_n^*\|_p \leqslant \begin{cases} q\| X_n \|_p, & \text{如 } p > 1;\\ \dfrac{e}{e-1}[1 + \mathbb{E}(X_n \log^+ X_n)], & \text{如 } p = 1.\end{cases}$$

此处 q 为 p 的共轭指数 (即 $1/p + 1/q = 1$), $\log^+ x = \log(e \vee x)$.

证明 由 Fubini 定理及定理 5.7 的 (1) 知,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\varphi(X_n^*) &= \int_\Omega \int_{[0,X_n^*]} \mathrm{d}\varphi(\lambda)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_0^\infty \mathbb{P}[X_n^* \geqslant \lambda]\mathrm{d}\varphi(\lambda)\\ &\leqslant \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\varphi(\lambda)\int_{[X_n^*\geqslant\lambda]} X_n \mathrm{d}\mathbb{P}\\ &= \mathbb{E}\left[X_n \int_0^{X_n^*} \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\varphi(\lambda)\right]. \quad (\text{Fubini 定理})\end{aligned}$$

今取 $\varphi(\lambda) = (\lambda - 1)^+$. 由于

$$\int_0^X \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}(\lambda-1)^+ = \int_1^{X\vee 1}\frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\lambda = \log(X\vee 1) = \log^+ X,$$

得出

$$\mathbb{E}(X_n^* - 1) \leqslant \mathbb{E}[(X_n^* - 1)^+] \leqslant \mathbb{E}[X_n \log^+ X_n^*].$$

由初等不等式

$$\log x \leqslant x/e \quad (x \geqslant 0) \Longrightarrow a\log^+ b \leqslant a \log^+ a + b/e$$

(当 $b \leqslant 1$ 时此式平凡. 若 $b > 1$, 令 $x = b/a$, 则后式由前式导出) 得

$$\mathbb{E}[X_n \log^+ X_n^*] \leqslant \mathbb{E}[X_n \log^+ X_n + X_n^*/e].$$

由此及前一式子得出定理的最后断言. 最后, 取 $\varphi(\lambda) = \lambda^p\,(p > 1)$. 则由 Hölder 不等式有

$$\mathbb{E}[X_n^{*p}] \leqslant \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[X_n X_n^{*(p-1)}\right] \leqslant q(\mathbb{E}X_n^p)^{1/p}(\mathbb{E}X_n^{*p})^{1/q}.$$

无妨设 $\|X_n\|_p < \infty$. 由于 $(X_n^*)_{n\geqslant 0}$ 依然是下鞅, 从而

$$\mathbb{E}X_n^{*p} \leqslant \sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k^p \leqslant n\mathbb{E}X_n^p < \infty.$$

因此, 若 $\mathbb{E}X_n^{*p} \neq 0$, 则在前式两边同除以 $\left[\mathbb{E}(X_n^{*p})\right]^{1/q}$, 即导出定理关于 $p > 1$ 情形的断言. 若 $\mathbb{E}X_n^{*p} = 0$, 则 $\mathbb{E}X_n^p = 0$, 从而不等式成为等式. □

§5.4 收 敛 定 理

下面, 我们研究下鞅的收敛性. 为此, 先做点准备.

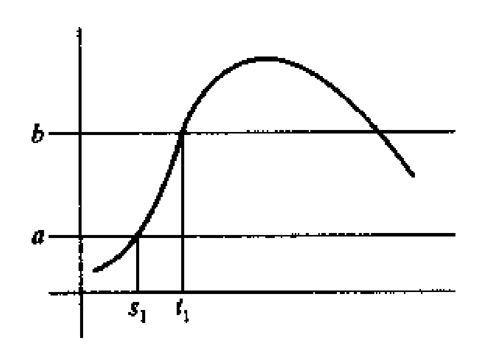
回忆对于非随机情形, 若实数列 $\{x_n\}$ 发散, 则

$$\underline{\lim_n} x_n < \overline{\lim} x_n.$$

从而存在 $a, b \in \mathbb{R}$ 使

$$\underline{\lim_n} x_n < a < b < \overline{\lim_n} x_n.$$

由此可见, $\{x_n\}$ 从小于 a 跳到大于 b 无穷多次. 详言之, 命



$$s_1 = \inf\{n \geqslant 0 : x_n < a\}$$
$$t_1 = \inf\{n > s_1 : x_n > b\}$$
$$s_2 = \inf\{n > t_1 : x_n < a\}$$
$$\cdots$$

如 $t_1 < \infty$, 则从 s_1 到 t_1, $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$上穿区间 $[a,b]$ 一次. 这样, 数列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 发散当且仅当 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 上穿某区间 $[a,b]$ 的次数等于无穷.

今考虑下鞅 $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$, N 固定. 我们要研究 (X_n) 的 "上窜下跳" 次数. 由于 $\{(X_n-a)^+\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 依然是下鞅, 因此, 我们可设 $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ 为非负下鞅且只需考虑 $a=0$ 的情形. 命

$$S_1 = \min\{n : N \geqslant n \geqslant 0, X_n = 0\},$$
$$T_1 = \min\{n : N \geqslant n \geqslant S_1, X_n \geqslant b\},$$
$$\vdots$$
$$S_k = \min\{n : N \geqslant n \geqslant T_{k-1}, X_n = 0\},$$
$$T_k = \min\{n : N \geqslant n \geqslant S_k, X_n \geqslant b\},$$
$$\vdots$$

如常, 补定义 $\min\{\ \} = N$. 显然, 若 "上窜下跳" 的次数 $V_0^b(X,N) =: j > 0$, 则

$$(X_{T_1} - X_{S_1}) + \cdots + (X_{T_j} - X_{S_j}) \geqslant jb.$$

此式对 $j=0$ 亦对, 因为约定空集和为 0. 将 $j = V_0^b(X,N)$ 代入上式并取期望, 得出

$$\mathbb{E}(X_{T_1} - X_{S_1}) + \cdots + \mathbb{E}\left(X_{T_{V_0^b(X,N)}} - X_{S_{V_0^b(X,N)}}\right) \geqslant b\mathbf{E}V_0^b(X,N).$$

这个表达式太复杂而难于直接应用. 然而, 由下鞅性质

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(X_{S_1}-X_0)\geqslant 0,\\&\mathbb{E}(X_{S_2}-X_{T_1})\geqslant 0,\\&\qquad\vdots\\&\mathbb{E}\Big(X_{S_{V_0^b(X,N)}}-X_{T_{V_0^b(X,N)-1}}\Big)\geqslant 0,\\&\mathbb{E}\Big(X_N-X_{T_{V_0^b(X,N)}}\Big)\geqslant 0.\end{aligned}$$

把所有这些项加到上式的左方, 便得出

$$\mathbb{E}X_n-\mathbb{E}X_0\geqslant b\mathbb{E}V_0^b(X,N).$$

回到原始情形, 我们已经证得

定理 5.11 (上穿不等式). 设 $X=(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ 为下鞅, $V_a^b(X,N)$ 为 X 上穿 $[a,b]$ 的次数, 即 $(X-a)^+$ 上穿 $[0,b-a]$ 的次数. 则

$$\mathbb{E}V_a^b(X,N)\leqslant\frac{1}{b-a}\Big[\mathbb{E}(X_N-a)^+-\mathbb{E}(X_0-a)^+\Big]\leqslant\frac{1}{b-a}[\mathbb{E}X_N^++|a|].$$

对下鞅 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, 由 "上窜下跳" 不等式知, 当 $N\to\infty$ 时, $V_a^b(X,N)\uparrow$ 某 V_a^b. 另一方面, 因 (X_n^+) 也是下鞅, 我们也有 $\mathbb{E}X_N^+\uparrow\sup\limits_n\mathbb{E}X_n^+$. 这样, 若 $\sup\limits_n\mathbb{E}X_n^+<\infty$, 则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}V_a^b\leqslant\Big(\sup_n X_n^++|a|\Big)/(b-a)<\infty\\&\Longrightarrow V_a^b<\infty,\qquad \text{a.s.}\end{aligned}$$

记上述例外集为 Λ_a^b, 令 $\Lambda=\bigcup\limits_{a<b,\,a,b\in\mathbb{Q}}\Lambda_a^b$. 则 $\mathbb{P}(\Lambda)=0$, 且在 Λ^c 上, 我们有

$$\varliminf_n X_n=\varlimsup_n X_n=:X_\infty.$$

这便导出如下基本定理:

定理 5.12. 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为下鞅, $\sup\limits_n\mathbb{E}X_n^+<\infty\iff\sup\limits_n\mathbb{E}|X_n|<\infty$, 则 $\exists X_\infty\in\mathscr{F}_\infty=\bigvee\limits_n\mathscr{F}_n$ 使 $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X_\infty$ 且 $\mathbb{E}|X_\infty|<\infty$.

证明 由于 (X_n) 是下鞅, $\mathbb{E}|X_n|=2\mathbb{E}X_n^+-\mathbb{E}X_n\leqslant 2\mathbb{E}X_n^+-\mathbb{E}X_1$, 可见成立 "$\Longleftarrow$". 而

$$\infty>\sup_n\mathbb{E}|X_n|=\varliminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n|\geqslant\mathbb{E}|X_\infty|.$$

最后的不等式用到 Fatou 引理. □

注 5.13. 因 (X_n) 是下鞅, 当 $N \to \infty$ 时, $\mathbb{E}X_N \uparrow \sup_n \mathbb{E}X_n \leqslant \sup_n \mathbb{E}X_n^+$. 由此看出, 定理的假设稍强于一种较自然的条件: $\sup_n \mathbb{E}X_n < \infty$.

在讨论 Doob 停止定理时, 我们曾假定 $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{Z}}_+}$ 是一个鞅 (下鞅). 既然对于 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, 我们已有 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty$. 何时可使 $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{Z}}_+}$ 也是下鞅? 即何时有

$$\mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_n] \geqslant X_n, \quad \forall n \geqslant 0.$$

这等价于

$$\int_A X_\infty \geqslant \int_A X_n, \quad A \in \mathscr{F}_n,\ n \geqslant 0.$$

但我们已有

$$\int_A X_m \geqslant \int_A X_n, \quad A \in \mathscr{F}_n,\ m \geqslant n \geqslant 0.$$

这样, 为保持右闭性, 需要

$$\int_A X_\infty \geqslant \varliminf_m \int_A X_m, \quad A \in \mathscr{F}_n, n \geqslant 0.$$

如非负, Fatou 引理给出反向不等式, 因此适当的条件是需要的. 条件 "$|X_n| \leqslant Y$ 可积" 已足够, 但我们将看到, 这比下述条件强:

$$\int_A X_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_A X_\infty, \qquad \forall A \in \mathscr{F}_n,\ n \geqslant 0.$$

这实际上要求, 上式对 $\forall A \in \cup_n \mathscr{F}_n$ 成立. 若把条件稍为加强为

$$\int_A X_m \to \int_A X_\infty, \qquad \forall A \in \mathscr{F}$$

$$\Longleftrightarrow (X_n)_{n\geqslant 0} \text{ 为一致可积族 (见 [46, p.118])}.$$

回忆 $X \in L^1$ 等价于: 当 $\alpha \to \infty$ 时, $\int_{[|X|\geqslant\alpha]} |X| =: \mathbb{E}(|X|; |X| \geqslant \alpha) \longrightarrow 0$. 与此类似, 我们引进如下概念

定义 5.14. 称随机变量 (r.v.) 的族 $\mathscr{H}$ 一致可积, 如

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{X\in\mathscr{H}} \mathbb{E}[|X|; |X| \geqslant \alpha] = 0.$$

显然, 如 $|X_n| \leqslant Y$ 可积, 则 (X_n) 一致可积.

定理 5.15 (一致可积性判准). 为使 $\mathscr{H} \subset L^1$ 一致可积, 充要条件是

(1) L^1 一致有界: $\sup_{X\in\mathscr{H}} \mathbb{E}|X| < \infty$; 并且

(2) 依概率等度连续: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得

$$\mathbb{P}(A) < \delta \Longrightarrow \sup_{X \in \mathscr{H}} \mathbb{E}(|X|; A) < \varepsilon.$$

定理 5.16 (L^1 收敛准则). 设 $(X_n)_{n\geqslant 0} \subset L^1$. 为使

$$X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty \left(\Longleftrightarrow \int |X_n - X_\infty| \to 0 \right), \qquad n \to \infty$$

充要条件是 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 一致可积且 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$.

证明　以上两定理的证明见 [66, p.228]或 [43, 附录 (二)]. □

让我们回到右闭性定理的证明. 假设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 一致可积. 由

$$\mathbb{E}|X_n| \leqslant \alpha + \int_{[|X_n| \geqslant \alpha]} |X_n|.$$

和一致可积性知 $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$. 从而由收敛定理 (定理 5.12) 可以得到 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty \in L^1$. 由此及一致可积性

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow X_n \underset{L^1}{\xrightarrow{\text{a.s.}}} X_\infty \\
&\Longrightarrow X_n I_A \underset{L^1}{\to} X_\infty I_A, \quad A \in \mathscr{F} \\
&\Longrightarrow \int_A X_n \to \int_A X_\infty, \quad A \in \mathscr{F}.
\end{aligned}$$

有时, 我们需要考虑单调下降的 σ 域流 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$: 如 $m \geqslant n$, 则 $\mathscr{F}_m \subset \mathscr{F}_n$. 此时, 命 $\mathscr{G}_{-n} = \mathscr{F}_n$, $n \geqslant 0$. 则 $(\mathscr{G}_{-n})_{n\geqslant 0}$ 成为单调上升 σ 域流: 如 $-m \leqslant -n$, 则 $\mathscr{G}_{-m} \subset \mathscr{G}_{-n}$.

定义 5.17. 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 适应的可积随机过程, 且 $(\mathscr{F}_n)$ 单调下降. 命 $\mathscr{G}_{-n} = \mathscr{F}_n$, $Y_{-n} = X_n$, $n \geqslant 0$. 称 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是关于 $(\mathscr{F}_n)$ 的**反向鞅** (**反向下鞅**), 如果 $(Y_{-n})_{n\geqslant 0}$ 是关于 $(\mathscr{G}_{-n})$ 的鞅 (下鞅).

试看收敛性. 因为 (Y_{-n}^+) 关于 $(\mathscr{G}_{-n})$ 为下鞅, 所以 $\sup_{n\geqslant 0} \mathbb{E} Y_{-n}^+ \leqslant \mathbb{E} Y_0^+ = \mathbb{E} X_0^+ < \infty$. 因而存在 $X_{-\infty}$ 使得

$$X_n = Y_{-n} \longrightarrow X_{-\infty}, \qquad \text{a.s.}$$

另一方面, 由 $X_n \in \mathscr{F}_n$ 及 $\mathscr{F}_n \downarrow$ 知 $X_{-\infty} \in \bigwedge_{n\geqslant 0} \mathscr{F}_n := \bigcap_{n\geqslant 0} \mathscr{F}_n$. 但由于

$$m > n \Longrightarrow \mathbb{E}[X_n | \mathscr{F}_m] \geqslant X_m \Longrightarrow \mathbb{E} X_n \geqslant \mathbb{E} X_m.$$

即当 $n \uparrow$ 时, $\mathbb{E} X_n \downarrow$. 我们还需要条件 "$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} X_n > -\infty$" 以保证 $X_{-\infty}$ 的可积性.

定理 5.18. 设 $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 为反向下鞅. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n > -\infty$, 则 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 一致可积且存在 $X_{-\infty} \in \bigcap\limits_n \mathscr{F}_n$ 使

$$X_n \xrightarrow[L^1]{\text{a.s.}} X_{-\infty}.$$

从而 $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{Z}}_+}$ 也是反向下鞅.

证明 只需再证 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 的一致可积性. 对$\varepsilon > 0$, 选定 k 使

$$\mathbb{E}X_k - \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n < \varepsilon.$$

则由

$$\mathbb{E}[X_k|\mathscr{F}_n] \geqslant X_n, \qquad n \geqslant k$$

知

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_n|; |X_n| \geqslant \alpha] &= \mathbb{E}[X_n; X_n \geqslant \alpha] - \mathbb{E}[X_n; X_n \leqslant -\alpha] \\
&= \mathbb{E}[X_n; X_n \geqslant \alpha] + \mathbb{E}[X_n; X_n > -\alpha] - \mathbb{E}X_n \\
&\leqslant \mathbb{E}[X_k; X_n \geqslant \alpha] + \mathbb{E}[X_n; X_n > -\alpha] - \mathbb{E}X_k + \varepsilon \\
&\leqslant \mathbb{E}[X_k; X_n \geqslant \alpha] - \mathbb{E}[X_k; X_n \leqslant -\alpha] + \varepsilon \\
&\leqslant \mathbb{E}[|X_k|; X_n \geqslant \alpha] + \mathbb{E}[|X_k|; X_n \leqslant -\alpha] + \varepsilon \\
&= \mathbb{E}[|X_k|; |X_n| \geqslant \alpha] + \varepsilon.
\end{aligned}$$

但当 $\alpha \to \infty$ 时,

$$\mathbb{P}[|X_n| \geqslant \alpha] \leqslant \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}|X_n| = \frac{1}{\alpha}(2\mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_n) \leqslant \frac{1}{\alpha}(2\mathbb{E}X_k^+ - \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}X_n) \to 0$$

关于 $n \geqslant k$ 一致地成立. 故由定理 5.15, 当 α 充分大时,

$$\sup_{n\geqslant k} \mathbb{E}[|X_k|; |X_n| \geqslant \alpha] \leqslant \varepsilon,$$

从而当 α 充分大时,

$$\begin{aligned}
\sup_n \mathbb{E}[|X_n|; |X_n| \geqslant \alpha] &\leqslant \sup_{n<k} \mathbb{E}[|X_n|; |X_n| \geqslant \alpha] + \sup_{n\geqslant k} \mathbb{E}[|X_n|; |X_n| \geqslant \alpha] \\
&\leqslant 3\varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

§5.5 连续参数鞅 (上、下鞅)

在研究连续时间参数的鞅(下鞅)时, 自然希望把它归结为离散时间参数情形. 回忆在研究强马氏性时, 从离散值停时过渡到连续值停时, 一个自然的要求是过程右连续. 此时

$$T_n \downarrow T \Longrightarrow X_{T_n} \to X_T.$$

因此, 右连续性起重要作用. 特别是 Doob 停止定理:

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] = (\geqslant)X_s,$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S] = (\geqslant)X_S, \text{如 } T \geqslant S; \\ \mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S] \geqslant X_{S\wedge T}, \text{ 一般情形.} \end{cases}$$

此外, 在强马氏性研究中, 还要求过程具有 Feller 性: 即对于每 $f \in C_b(\mathbb{R})$, 映射 $x \to \mathbb{E}_x f(X_t)$ 连续. 在这里, 我们代之以

$$T_n \downarrow T, \qquad \mathscr{F}_{T_N} \downarrow \mathscr{F}_T.$$

这就要求 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 具有右连续性: $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$. 如不然, 则以 $\mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$ 代替原先的 $\mathscr{F}_t$, 那么 σ 域流 $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$ 就成为右连续的了. 有了这些想法之后, 容易把离散时间参数的 (下) 鞅推广到连续时间参数情形. 作为例子, 我们来证明

定理 5.19. 设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为下鞅, a.s. 右连续, 则对于几乎所有的 ω, $t \to X(t,\omega)$ 在任一有限区间上有界.

证明 只需证 $\sup\limits_{t\in[0,n]} |X_t|$ 对每 $n \geqslant 1$ 以概率 1 有界. 由右连续性, 这等价于

$$\sup_{t\in D\cap[0,n]} |X_t| = \sup_{t\in[0,n]} |X_t|$$

以概率 1 有界, 此处 D 为 $[0,\infty)$ 中的任一可数稠子集. 再记 $D_n = D \cap [0,n]$. 设 U_N 为 D_n 的任一有限子集, 并表

$$U_N = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_N\}.$$

则因 $(Y_k = X_{t_k})_{0\leqslant k\leqslant N}$ 为下鞅. 故

$$\mathbb{P}\Big[\max_{0\leqslant k\leqslant N} |X_{t_k}| \geqslant \alpha\Big] \leqslant \frac{2}{\alpha}\mathbb{E}|X_{t_N}| \leqslant \frac{2}{\alpha}\mathbb{E}|X_n|.$$

令 $U_N \uparrow D_n$, 我们得出

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{t\in D_n} |X_t| \geqslant \alpha\Big] \leqslant \frac{2}{\alpha}\mathbb{E}|X_n|.$$

再命 $\alpha \to \infty$, 得到

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{t\in D_n} |X_t| = \infty\Big] = 0. \qquad \square$$

对于给定的下鞅 $(X_t)_{t\geqslant 0}$, 当然有适应性:

$$X_t \in \mathscr{F}_t, \qquad t \geqslant 0.$$

如上所述, 当 $(\mathscr{F}_t)$ 非右连续时, 则我们总可以用 $\mathscr{F}_{t+}$ 代替 $\mathscr{F}_t$, 而假定 $(\mathscr{F}_t)$ 右连续. 因为此时适应性条件 "$X_t \in \mathscr{F}_{t+}$" 是平凡的. 以下设 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 右连续. 另一问题是如 (X_t) 不右连续怎么办?

定义 5.20. 称 (Y_t) 为 (X_t) 的修正, 如对每一 t, $Y_t = X_t$, a.s.

定理 5.21. 设 (X_t) 为下鞅, $(\mathscr{F}_t)$ 右连续, 则 (X_t) 有右连续修正当且仅当 $\mathbb{E}X_t$ 右连续.

证明 见 [43, P.199] 定理 3. □

§5.6 鞅论应用两例

1) **强大数定律** 鞅论应用的一个典型例子 —— 古典的强大数定律, 可视为鞅论的重大成就之一 (J. Doob, 1949).

定理 5.22. 设 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 独立同分布, $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. 则

$$\sum_{k=1}^{n} X_k/n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}X_1, \qquad n \to \infty.$$

证明 不妨假定 $\mathbb{E}X_1 = 0$, 从而 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ 关于 $\mathscr{F}_n := \sigma(S_k : k \leqslant n)$ 是鞅. 命 $\mathscr{G}_n = \sigma(S_m : m \geqslant n)$, 则 $\mathscr{G}_n \downarrow \mathscr{G} := \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \mathscr{G}_n$. 固定 k : $1 \leqslant k \leqslant n$. 考虑鞅 $Z_n = \mathbb{E}[X_k|\mathscr{G}_n]$. 则由反向鞅的收敛定理 (定理 5.18) 知 $\mathbb{E}Z_n = \mathbb{E}X_k > -\infty$, $Z_n \xrightarrow[L^1]{\text{a.s.}} Z_{-\infty} \in \mathscr{G}$. 特别地

$$\int_A \mathbb{E}[X_k|\mathscr{G}] = \int_A X_k = \int_A Z_n \to \int_A Z_{-\infty}, \qquad A \in \mathscr{G}.$$

从而 $Z_{-\infty} = \mathbb{E}[X_k|\mathscr{G}]$. 另一方面, 由于 $\mathscr{G}_n = \sigma(S_n, X_m : m \geqslant n+1)$, 而 $(X_m, m > n)$ 与 (X_k, S_n) 独立, 因而对于一切 $m_1, \cdots, m_\ell \geqslant n+1$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{g(S_n)f_1(X_{m_1})\cdots f_\ell(X_{m_\ell})\mathbb{E}(X_k|S_n, X_m : m \geqslant n+1)\} \\
&= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[X_k g(S_n)f_1(X_{m_1})\cdots f_\ell(X_{m_\ell})|S_n, X_m : m \geqslant n+1)]\} \\
&= \mathbb{E}[X_k g(S_n)]\mathbb{E}[f_1(X_{m_1})\cdots f_\ell(X_{m_\ell})]. \quad (\text{由独立性})
\end{aligned}$$

及由独立性

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{g(S_n)f_1(X_{m_1})\cdots f_\ell(X_{m_\ell})\mathbb{E}[X_k|S_n]\} \\
&= \mathbb{E}\{f_1(X_{m_1}\cdots f_\ell(X_{m_\ell})\mathbb{E}[X_k g(S_n)|S_n]\} \\
&= \mathbb{E}\{f_1(X_{m_1}\cdots f_\ell(X_{m_\ell})\}\mathbb{E}[X_k g(S_n)].
\end{aligned}$$

进而 $\mathbb{E}[X_k|\mathscr{G}_n] = \mathbb{E}[X_k|S_n, X_m: m \geqslant n+1] = \mathbb{E}[X_k|S_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n]$. 后一等号是因 X_1 与 X_k 的对称性:

$$\mathbb{E}[f(S_n)X_1] = \mathbb{E}[f(S_n)X_k],$$

这可用单调类定理证之. 在前一式中对 k 从 1 到 n 求和, 得出

$$S_n/n = \mathbb{E}(X_1|S_n) = \mathbb{E}(X_1|\mathscr{G}_n).$$

再使用一次上面的结果:

$$\mathbb{E}[X_1|\mathscr{G}_n] \xrightarrow[L^1]{\text{a.s.}} \mathbb{E}[X_1|\mathscr{G}], \qquad n \to \infty.$$

最后, 由 $\lim_n S_n/n = \lim_n \sum_{j=m}^{n} X_j/n$ 知 $\lim_n S_n/n$ 是尾可测的 (Kolmogorov 零壹律), 因而必定是常数. 此常数必须是 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1|\mathscr{G}]] = \mathbb{E}X_1 = 0$. □

2) 马氏链的鞅刻画 让我们回到马氏链. 设 E 为可列集, $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为马氏链, 具有时齐转移概率矩阵 $(P_{ij}(t))$:

$$\mathbb{P}[X_t = j|X_0 = i] = p_{ij}(t).$$

假定其 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$ 全稳定:

$$q_i = -q_{ii} < \infty, \qquad \forall i \in \mathbb{E},$$

且保守

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i, \qquad \forall i \in \mathbb{E}.$$

再设 Q 过程唯一, 因而 $(p_{ij}(t))$ 满足向前方程

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in\mathbb{E}} p_{ik}(t)q_{kj}.$$

两边关于 t 取积分得

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) - p_{ij}(s) &= \int_s^t \sum_k p_{ik}(u)q_{kj}\mathrm{d}u \\ &= \int_s^t \sum_{k\neq j} p_{ik}(u)q_{kj}\mathrm{d}u - \int_s^t p_{ij}(u)q_j\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{5.4}$$

以 $\mathbb{P}_i$ 表从 i 出发的概率, 即 $\mathbb{P}_i[X_t = j] = \mathbb{P}[X_t = j|X_0 = i]$; 而以 $\mathbb{E}_i$ 表示相应的积分:

$$\mathbb{E}_i f(X_t) = \mathbb{E}[f(X_t)|X_0 = i] = \sum_k f_k \mathbb{P}[X_t = k|X_0 = i] = \sum_k p_{ik}(t)f_k.$$

再命 $Qf(i) = \sum\limits_j q_{ij} f_j$. 则对于 $f = I_j$: $I_j(k) = \delta_{jk}$, 我们有

$$q_{kj} = QI_j(k) = \sum_\ell q_{k\ell} I_j(\ell),$$

$$\sum_k p_{ik}(u) q_{kj} = \sum_k \mathbb{E}_i[q_{kj} : X_u = k] = \sum_k \mathbb{E}_i[QI_j(k) : X_u = k]$$
$$= \mathbb{E}_i(QI_j(X_u)).$$

使用这些记号, 由 (5.4) 式和 Fubini 定理得

$$\mathbb{E}_i I_j(X_t) - \mathbb{E}_i I_j(X_s) = \int_s^t \mathbb{E}_i(QI_j(X_u))\mathrm{d}u = \mathbb{E}_i\left[\int_s^t QI_j(X_u))\mathrm{d}u\right].$$

或者

$$\mathbb{E}_i\left[I_j(X_t) - I_j(X_s) - \int_s^t QI_j(X_u)\mathrm{d}u\right] = 0.$$

今设 $(\mathscr{F}_t)$ 为过程的自然 σ 域流, 则由马氏性得

$$\mathbb{E}_i\left[I_j(X_t) - \int_0^t QI_j(X_u)\mathrm{d}u \middle| \mathscr{F}_s\right]$$
$$= \mathbb{E}_i(I_j(X_t)|X_s) - \mathbb{E}_i\left[\int_s^t QI_j(X_u)\mathrm{d}u \middle| X_s\right] - \int_0^s QI_j(X_u)\mathrm{d}u$$
$$= \mathbb{E}_i[(I_j(X_s)|X_s) + \mathbb{E}_i\left[I_j(X_t) - I_j(X_s) - \int_s^t QI_j(X_u)\mathrm{d}u \middle| X_s\right]$$
$$- \int_0^s QI_j(X_u)\mathrm{d}u$$
$$= I_j(X_s) - \int_0^s QI_j(X_u)\mathrm{d}u + \mathbb{E}_{X(s)}\left[I_j(X_{t-s}) - I_j(X_0) - \int_0^{t-s} QI_j(X_u)\mathrm{d}u\right]$$
$$= I_j(X_s) - \int_0^s QI_j(X_u)\mathrm{d}u.$$

这表明

$$\left(I_j(X_t) - \int_0^t QI_j(X_u)\mathrm{d}u, \mathscr{F}_t\right)$$

是 $\mathbb{P}_i$ 鞅. 更一般地, 若 f 为只依赖于 E 中有限多点 (即具有紧支撑), 记为 $f \in C_0(E)$, 则

$$\left(f(X_t) - \int_0^t Qf(X_u)\mathrm{d}u, \mathscr{F}_t\right)$$

是 $\mathbb{P}_i$ 鞅. 简记

$$X_t^f = f(X_t) - \int_0^t Qf(X_u)\mathrm{d}u,$$

则我们得出如下结果

定理 5.23. 对每一个 $f \in C_0(E)$, $(X_t^f, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{P}_i$ 鞅.

这是马氏链的一种鞅刻画. 事实上, 这种刻画也适用于一般的马氏过程.

§5.7 补充与习题

1. 证明引理 5.2 之 (1)–(3). 其中 (3) 的数学表述为: 若 $(X_t^{(i)})_{n\geqslant 0}, i=1,2$ 是下鞅, 则上端 $(X_t^{(1)} \vee X_t^{(2)})_{n\geqslant 0}$ 也是下鞅.

2. 证明对所有的非负上鞅 $X=(X_n)$ 及实数 $r>0$, 都有 $r\mathbb{P}[\sup\limits_n X_n \geqslant r] \leqslant EX_0$.

3. 若 (X_t) 为鞅, 则对于每一常数 c, $(X_t \wedge c)$ 为上鞅.

4. 设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 上的上鞅, $\tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \cdots$ 为停时. 证明 $(X_{\tau_n})_{n\geqslant 0}$ 还是上鞅.

5. 设 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 独立同分布, 且 $\mathbb{E}X_1 = 0, \mathbb{E}X_1^2 = 1$. 令 $\mathscr{F}_n = \sigma(X_m : m \leqslant n)$, $S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} X_m$. 则 $(S_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $(S_n^2 - n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 都是鞅.

6. 若 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为非负下鞅, 则 $(X_n^* = \max\limits_{i\leqslant n} X_i)_{n\geqslant 0}$ 还是非负下鞅.

7. 设 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 为 E 上的马氏链, 具有转移矩阵 $P=(p_{ij})$. $f=(f(i), i\in E)$ 为非负有界的序列, 满足

$$f(i) = \sum_j p_{ij} f(j), \quad i \in E. \tag{5.5}$$

令 $X_n = f(Y_n), \mathscr{F}_n = \sigma(Y_m : m \leqslant n)$, 则 $(X_n, \mathscr{F}_n)$ 是鞅. 若将 (5.5) 换为:

$$f(i) \geqslant \sum_j p_{ij} f(j), \quad i \geqslant 0.$$

则 X_n 是上鞅.

8. 设 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 为 E 上的马氏链, 具有转移矩阵 $P=(p_{ij})$. 设 f 为 P 的一个特征向量, 即存在 $\lambda > 0$ 使得

$$\lambda f(i) = \sum_j p_{ij} f(j), \quad i \in E.$$

令 $X_n = \lambda^{-n} f(Y_n), \mathscr{F}_n = \sigma(Y_m : m \leqslant n)$, 则 $(X_n, \mathscr{F}_n)$ 是鞅.

9. 设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为状态空间 $\{0,1,2,\cdots\}$ 上的 Q 过程. 若 $y=(y(i): i\geqslant 0)$ 为 $Qy=\lambda y$ 的非零解, 证明 $Y_t = e^{-\lambda t} y(X(t))$ 为鞅.

10. 在推论 5.5 的前提下, 证明 $X_T \in \mathscr{F}_T$, $[T > S] \in \mathscr{F}_S$ 及 $X_T I_{[T \leqslant S]} \in \mathscr{F}_S$.

11. 设 X_n 为 $\mathbb{Z}$ 上的对称随机游动, 令 $\tau = \min\{n : X_n \in \{N, -M\}\}$, $N, M \geqslant 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_m, m \leqslant n)$. 证明:

(a) $(X_n, \mathscr{F}_n)$ 是鞅;

(b) $\forall\, n \geqslant 1, \tau \wedge n$ 是停时;

(c) $\mathbb{P}_0[X_\tau = N] = 1 - \mathbb{P}_0[X_\tau = -M] = \dfrac{M}{M+N}$.

12. 若 X_n 为 $\mathbb{Z}$ 上的非对称随机游动 (即 $p_{ii+1} = p, p_{ii-1} = q, p + q = 1$), 令 $\tau = \min\{n : X_n \in \{N, -M\}\}, N, M \geqslant 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_m, m \leqslant n)$, 证明

$$\mathbb{P}_0[X_\tau = N] = 1 - \mathbb{P}_0[X_\tau = -M] = \frac{1 - (q/p)^M}{1 - (q/p)^{M+N}}.$$

13. 设 $(Y_i)_{i\geqslant 0}$ 为随机变量序列, $\phi(x)$ 为对称的、非降的函数, 且 $\phi(0) = 0$, 并使得 $(\phi(Y_i))_{0\leqslant i\leqslant n}$ 为下鞅. 固定 $0 = s_0 \leqslant s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_n$, 证明

$$\mathbb{P}[|Y_i| \leqslant s_i, 1 \leqslant i \leqslant n] \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{E[\phi(Y_i)] - E[\phi(Y_{i-1})]}{\phi(s_i)}.$$

(若 $\phi(x) = |x|^p$, $p \geqslant 1, s_1 = s_2 = \cdots = \lambda$, 即得到 Kolmogorov 不等式.)

14. 设 $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个右连续鞅, f 是一个非负凸函数, 则对 $\forall\, \epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\geqslant 0} f(X_t) \geqslant \epsilon\right] \leqslant \frac{1}{\epsilon} \sup_{t\geqslant 0} Ef(X_t).$$

15. 设 $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 为鞅. 证明

(a) $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0, \quad \forall\, n \geqslant 0$;

(b) $\forall\, n, m \geqslant 0, \mathbb{E}[X_{n+m}|\mathscr{F}_n] = X_n$;

(c) 令 $Y_n = X_n, \mathscr{G}_n = \mathscr{F}_{2n}$, 则 $(Y_n, \mathscr{G}_n)$ 是鞅.

16. (Kolmogorov 零壹律) 设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 独立随机变量序列, $\mathscr{T}$ 为尾 σ 代数, 即 $\mathscr{T} = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{H}_n$, $\mathscr{H}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \cdots)$. 证明 $\forall\, A \in \mathscr{T}$, 要么 $\mathbb{P}(A) = 1$, 要么 $\mathbb{P}(A) = 0$. 从而任意随机变量 $Y \in \mathscr{T}$, 存在 $-\infty \leqslant c \leqslant \infty$ 使得 $\mathbb{P}[Y = c] = 1$.

17. 设 $X, X_n, n \geqslant 1$ 是可积的随机变量, 且当 $\alpha \to \infty$, $\mathbb{P}[|X_n| \geqslant \alpha] \to 0$ 关于 $n \geqslant 1$ 一致地成立, 则

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_n \int_{[|X_n|\geqslant\alpha]} |X| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

18. 试举一例: 鞅 X_t 是 L^1 有界的但不是一致可积的.

19. 设 $(X_t^{(n)})_{t\geqslant 0}, n \geqslant 1$ 是一列 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅. 假设在 $L^p(p \in [1,\infty])$ 中, 对任意 $t \geqslant 0$, $X_t^{(n)} \to X_t$, 则 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 也是 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅.

20. 设 $(X_n, Y_n)_{n\geqslant 0}$ 均为 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 鞅, T 为停时. 设在 $[T<\infty]$ 上, $X_T = Y_T$, 则

$$Z_n = \begin{cases} X_n, n < T; \\ Y_n, \ n \geqslant T \end{cases}$$

是鞅.

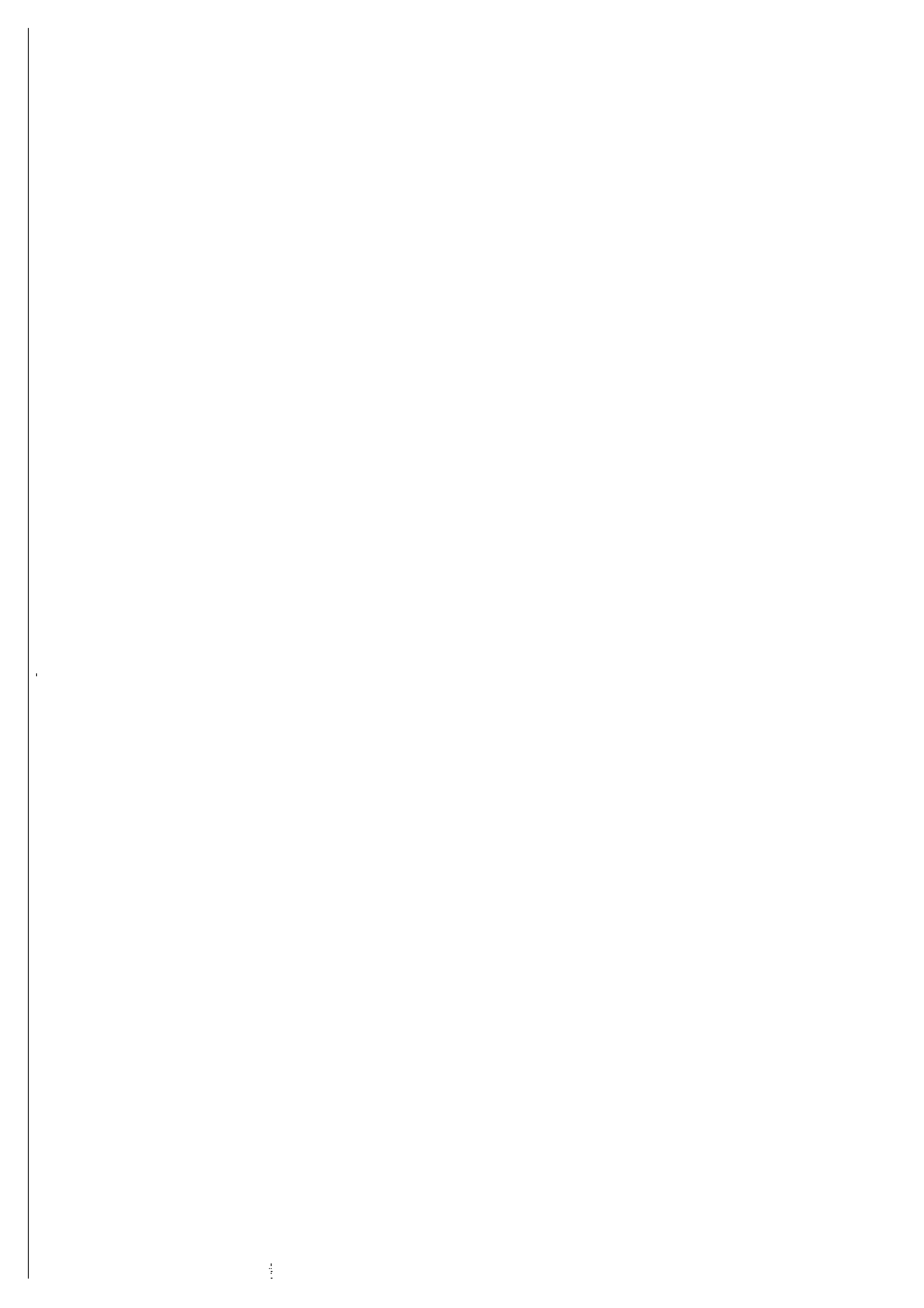
21. 考虑 Q 过程 X_t 具无穷小生成元 Ω, 令 $\tau_n, n \geqslant 0$ 为第 n 次跳跃时间, $\tau_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$, 满足 $\mathbb{P}[\tau_n < \infty] = 1, \mathbb{P}[\tau_\infty = \infty] = 1$. 令 $\mathscr{F}_t = \sigma\{X_s : s \leqslant t\}$, 对 $\forall\ i, f(i) > 0, \sum\limits_{j\neq i} q_{ij} f(j) < \infty$, 定义

$$Z(t) = f(X_t)\exp\left[-\int_0^t \left(\frac{\Omega f}{f}\right)(X_s)\mathrm{d}s\right], \quad Z_n(t) = Z(t\wedge\tau_n), n \geqslant 0,$$

则

(a) $\mathbb{E}_i Z_n(t) = f(i), t \geqslant 0$;

(b) $\forall\ i, (Z(\tau_n), \mathscr{F}_{\tau_n}, \mathbb{P}_i)$ 是鞅, $(Z(t), \mathscr{F}_t, \mathbb{P}_i)$ 是上鞅.



第六章 布朗运动

§6.1 布朗运动

无论从实际应用的角度或从数学理论的角度来看，布朗运动都是一类极端重要的随机过程. 1827 年，英国生物学家布朗 (Brown) 发现水中花粉的运动，起因于花粉受到周围水分子的碰撞，水分子的运动产生一种随机力，而花粉粒子每秒钟所受到的碰撞次数非常大，约 10^{21} 次. 因此，花粉的运动可看作是受大量微小作用力的作用而作的随机运动. 设 B_t 为一个花粉粒子在 t 时刻所处的位置的一个坐标. 如液体均匀，则自 t_1 到 t_2 的位移 $B_{t_2}-B_{t_1}$ 是许多几乎独立的小位移之和，即许多小独立随机变量之和. 依中心极限定理，

$$B_{t_2}-B_{t_1}\sim \mathscr{N}(a(t_1,t_2),\sigma(t_1,t_2)).\ (\text{增量的正态性})$$

此处 $\mathscr{N}(a,\sigma)$ 表以 a 为期望、以 σ 为均方差的正态分布. 由液体的均匀性，

$$\begin{aligned}&a(t_1,t_2)=0,\\&\sigma(t_1,t_2)^2=\sigma^2(t_2-t_1).\ (\text{分散程度与时间成正比})\end{aligned}$$

此处的 $\sigma>0$ 为介质常数 (依赖于液体的性质) 而与时间、空间无关. 再则，由于 $B_{t_n}-B_{t_{n-1}},\cdots,B_{t_2}-B_{t_1}$ 分别是许多几乎独立的小位移之和，故拟设它们是相互独立的.

定义 6.1. 称实值过程 $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 为**布朗运动 (BM)** 或 **Wiener 过程**，如它满足下述两条件.

(1) 独立增量性. 对任意的 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n\,(n\geqslant 2)$，增量

$$B_{t_1}-B_{t_0},\ B_{t_2}-B_{t_1},\ \cdots,\ B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$$

相互独立 (这种过程称为**独立增量过程**)，而且这些增量也与 B_{t_0} 独立.

(2) 正态性. 对于每 $s<t$, $B_t - B_s \sim \mathscr{N}(0,\sigma|t-s|^{1/2})$, 此处 $\sigma>0$ 为常数.

设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为独立增量过程. 若 X_{t_0} 与 $X_{t_1}-X_{t_0},\cdots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$, $(t_0=0, t_n=t)$ 也独立, 则 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 必定是马氏过程. 事实上, 对任何的 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, 命

$$Y_0=X_{t_0},\ Y_1=X_{t_1}-X_{t_0},\cdots,\ Y_n=X_{t_n}-X_{t_{n-1}},$$

则 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 是独立 r.v. 系列, 且 $X_{t_n}=\sum\limits_{i=0}^{n}Y_i$ 为独立 r.v. 之和, 从而是马氏的:

$$\mathbb{P}[X_{t_n}\leqslant\alpha|X_{t_0},\cdots,X_{t_{n-1}}]=\mathbb{P}[X_{t_n}\leqslant\alpha|X_{t_{n-1}}].$$

对于 BM, 若假定 $\mathbb{P}[B_0=0]=1$, 则 $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是马氏过程. 由上述可见, 若记 $s=t_{n-1}$, 则

$$\mathbb{P}[B_t\leqslant\alpha|B_{t_0},\cdots,B_{t_{n-1}}]=\mathbb{P}[B_t\leqslant\alpha|B_s].$$

另一方面, 利用过程的独立增量性质, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[f(B_s)g(B_t)]=\mathbb{E}[f(B_s-B_0)g(B_t-B_s+B_s-B_0)]\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)}}\int_{\mathbb{R}^2}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2 s}\right]\exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2(t-s)}\right]f(x)g(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2 s}\right]f(x)\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2(t-s)}\right]g(x+y)\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2 s}\right]f(x)\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right]g(y)\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}}p(s,0,\mathrm{d}x)f(x)\int p(t-s,x,\mathrm{d}y)g(y),
\end{aligned}$$

此处

$$p(t,x,\mathrm{d}y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2 t}\right]\mathrm{d}y.$$

对于 $\prod\limits_{k=1}^{m}f_k(B_{t_k})$ 也有类似的表达式. 这表明: $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是具有转移概率 $p(t,x,\mathrm{d}y)$ 的马氏过程.

§6.2 轨道性质

定理 6.2 (Kolmogorov 判准). 假设 $\exists\alpha,\varepsilon>0$ 使

$$\mathbb{E}[|X_t-X_{t+h}|^\alpha]\leqslant\mathrm{const}\cdot|h|^{1+\varepsilon},\qquad t,\ t+h\in[a,b],$$

则过程 $(X_t)_{t\in[a,b]}$ a.s. 连续.

对于 BM, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|B_t - B_{t+h}|^{2m}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|h|}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} y^{2m}\exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2|h|}\right]\mathrm{d}y \\ &= (\sigma\sqrt{|h|})^{2m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z^{2m}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]\mathrm{d}z \\ &= C_m|h|^m, \qquad m\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

可见, (B_t) 的轨道 a.s. 连续. 应用可分性, 可造出一个可分修正, 使得此修正的一切样本轨道连续. 另一方面

$$\begin{aligned}&P(t)f(x) := \int p(t,x,\mathrm{d}y)f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t\sigma^2}\right]f(y)\mathrm{d}y \\ &\Longrightarrow P(t)C_b(\mathbb{R})\subset C_b(\mathbb{R}) \\ &\Longrightarrow (P(t))_{t\geqslant 0} \text{ 是 Feller 的.}\end{aligned}$$

进而 (B_t) 是强马氏过程. 事实上, 我们有更一般的

定理 6.3. $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 关于 $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$ 是强马氏过程.

由于常数 σ 常为累赘, 下面作一限制.

定义 6.4. 称 (B_t) 为 (标准) BM, 如果它是 BM, $\sigma = 1$, 一切轨道连续且 $B_0 \equiv 0$.

上面研究了 BM 的一些简单性质, 下面将研究 BM 的一些 "奇妙" 的特殊性质.

定理 6.5. 设 $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 为 BM, 则下述过程也都是 BM.

(1) $(-B_t)_{t\geqslant 0}$ (关于原点的对称性或发射不变性).

(2) $(B_{t+s} - B_s)_{t\geqslant 0}$, $s\geqslant 0$ 固定 (起点变换).

(3) $(cB_{t/c^2})_{t\geqslant 0}$, $c>0$ 固定 (尺度变换).

(4) $(tB_{1/t})_{t\geqslant 0}$, 约定它在 $t=0$ 处为零 (时间倒置).

(5) 固定 $u>0$, $(B_u - B_{u-t})_{0\leqslant t\leqslant u}$ (时间反向).

证明 只证 (4). 命

$$X_t = tB_{1/t}, \qquad t>0.$$

a) 由于 $B_t \sim \mathscr{N}(0,\sqrt{t})$, 可见

$$X_t \sim \mathscr{N}\left(0,\sqrt{t^2\cdot 1/t}\right) = \mathscr{N}(0,\sqrt{t}).$$

b) 再则, 若 $s \leqslant t$, 则

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] + \mathbb{E}B_s^2 = \mathbb{E}B_s\mathbb{E}(B_t - B_s) + \mathbb{E}B_s^2 = \mathbb{E}B_s^2 = s.$$

从而 $\mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t$. 进而

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = st\mathbb{E}[B_{1/s}B_{1/t}] = s \wedge t.$$

这样, 若 $0 < t_1 < t_2$, 则 $\mathbb{E}(X_{t_2} - X_{t_1})^2 = t_2 - 2t_1 \wedge t_2 + t_1 = t_2 - t_1$. 故 $X_{t_2} - X_{t_1} \sim \mathscr{N}(0, \sqrt{t_2 - t_1})$.

c) 另一方面, 对 $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, 由增量的正态性有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_{t_2} - X_{t_1})(X_{t_4} - X_{t_3})] &= t_2 \wedge t_4 - t_1 \wedge t_4 - t_2 \wedge t_3 + t_1 \wedge t_3 \\ &= t_2 - t_1 - t_2 + t_1 = 0.\end{aligned}$$

这证得过程具有独立增量 (熟知, 正态过程不相关 $\Longleftrightarrow$ 独立). 而对任意的 $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ 及 $\alpha_0, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X_{t_i} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t_i B_{1/t_i}$$

是正态的. 故 $(X_t)_{t>0}$ 是独立增量正态过程.

d) 最后, (X_t) 的一切轨道在 $(0, \infty)$ 上连续. 至于在 $t = 0$ 处, 按照 BM 的性质取可分集 R, 以 0 为极限点, 则

$$\lim_{t \in R,\, t \downarrow 0} X_t = 0, \qquad \text{a.s.}$$

因此, 可补定义 $X_0 \equiv 0$ 且使 (X_t) 在 $t = 0$ 处 (右) 连续. □

注 6.6. 上面的 (4) 给出如下强大数定律

$$\mathbb{P}\left[\lim_{t \uparrow \infty} \frac{1}{t} B_t = 0\right] = 1.$$

定理 6.7. 以概率 1, BM 在任一点 $t \geqslant 0$ 非 Lipschitz 连续. 因此, BM 无处可微.

证明 设 $B_t(\omega)$ 在某 $t \in [0, 1)$ 处 Lipschitz 连续. 则存在 $\ell, m \in \mathbb{N}$ 使得下述增量估计

$$\left|B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}\right| \leqslant \frac{\ell}{n}$$

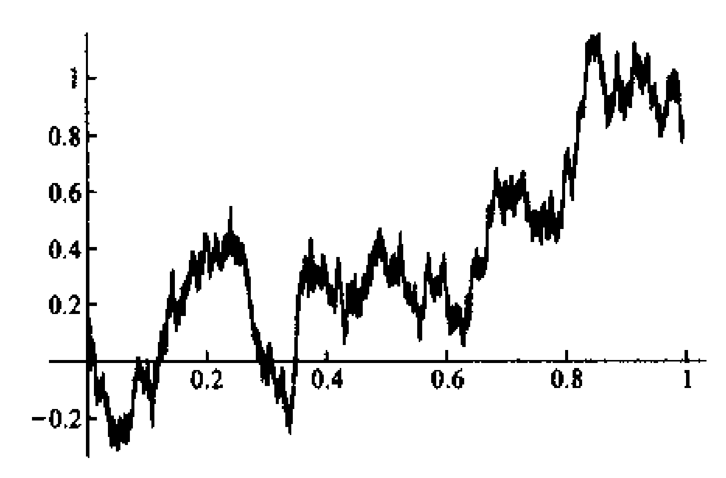
对一切 $n \geqslant m$ 和 $\{0, \cdots, n-1\}$ 中的接连三个 k 成立. 记此事件为 Λ. 若记

$$\Lambda_{\ell,m} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcap_{j=0}^{2} \left[\left|B_{\frac{k+j+1}{n}} - B_{\frac{k+j}{n}}\right| \leqslant \frac{\ell}{n}\right],$$

则上述事件可表成 $\Lambda = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \Lambda_{\ell,m}$. 因此, 我们只需证明 $\mathbb{P}(\Lambda_{\ell,m}) = 0$. 但

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Lambda_{\ell,m}) &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\bigcup_{k=0}^{n-1}\bigcap_{j=0}^{2}\left[\left|B_{\frac{k+j+1}{n}} - B_{\frac{k+j}{n}}\right| \leqslant \frac{\ell}{n}\right]\right\} \\
&\leqslant \varliminf_{n\to\infty} n\mathbb{P}\left\{\bigcap_{j=0}^{2}\left[\left|B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}}\right| \leqslant \frac{\ell}{n}\right]\right\} \text{(由平稳性)} \\
&= \varliminf_{n\to\infty} n\left(\mathbb{P}\left[\left|B_{\frac{1}{n}}\right| \leqslant \frac{\ell}{n}\right]\right)^3 \text{(由增量独立性和平稳性)} \\
&= \varliminf_{n\to\infty} n\left(\mathbb{P}\left[|B_1| \leqslant \frac{\ell}{\sqrt{n}}\right]\right)^3 \text{(尺度变换)} \\
&\leqslant \text{const} \cdot \varliminf_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 \left(\text{因} \int_0^z e^{-x^2/2}\mathrm{d}x \sim z, z\to 0\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

最后一步说明了取接连三项的原因. □



BM 的样本轨道示意图

由于有限变差函数几乎处处可导, 因此

推论 6.8. BM 在任一有限区间上非有界变差.

定理 6.9 (BM 的重对数律 (Lévy)).

$$\mathbb{P}\left[\varlimsup_{\delta\downarrow 0} \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\\ t-s<\delta}} \frac{|B_t - B_s|}{(2\delta\log\log\frac{1}{\delta})^{1/2}} = 1\right] = 1.$$

§6.3 布朗运动的鞅性质

设 $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 为定义在某概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上的(标准) BM, 令 $\mathscr{F}_t^0 = \sigma(B_u :$

$u \leqslant t$). $\mathscr{F}_t^1 = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^0$, $\mathscr{F}_t = \sigma(\mathscr{F}_t^0 \cup \mathscr{N})$, $\mathscr{N}$ 为一切 $\mathbb{P}$ 零集的全体. 我们称 $(\mathscr{F}_t)$ 是 $(\mathscr{F}_t^0)$ 的**完备化**. 作完备化是为了使 $T_A = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in A\}$ 关于一切 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ 可测.

定理 6.10. 关于 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 和 $\mathbb{P}_x$ $(x \in \mathbb{R})$, 下述断言成立.

(1) $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是鞅.

(2) $(B_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ 是鞅.

(3) 对每 $\theta \in \mathbb{R}$, $\left(\exp\left[\theta B_t - \frac{1}{2}t\theta^2\right]\right)_{t\geqslant 0}$ 是鞅, 称为**指数鞅** (BM 的拉氏变换).

(4) 如 $f \in C^2(\mathbb{R})$ (二阶偏导数连续), f 与 $\Delta f = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ 有界, 则

$$\left(f(B_t) - \int_0^t \frac{1}{2}\Delta f(B_u)\mathrm{d}u\right)_{t\geqslant 0}$$

是鞅.

证明 (1) 由马氏性

$$\mathbb{E}_x[f(B_t)|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}_{B_s} f(B_{t-s}), \qquad f \in_b \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

然后由单调类定理知, 上式对于一切使 $f(B_t)$ 可积的 $f \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ 也成立. 特别地,由 B_t 的可积性得出

$$\mathbb{E}_x[B_t|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}_{B_s}(B_{t-s}).$$

然而

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x B_t &= \int p(t,x,\mathrm{d}y)y = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right] y\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right][(y-x)+x]\mathrm{d}y \\
&= x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right]\mathrm{d}y \\
&= x.
\end{aligned}$$

故 $\mathbb{E}_x[B_t|\mathscr{F}_s] = B_s$.

(2) $\mathbb{E}_x[B_t^2|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}_x[(B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2|\mathscr{F}_s] = (t-s) + 0 + B_s^2$.

(3) 记

$$X_t = \exp\left[\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t\right], \qquad t \geqslant 0,$$

$$X_t^s = \exp\left[\theta(B_t - B_s) - \frac{\theta^2}{2}(t-s)\right], \qquad t \geqslant s.$$

因为 $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, 得出 $\mathbb{E}X_t^s = 1$. 另一方面, X_t^s 与 $\mathscr{F}_s$ 独立且 $X_t = X_s X_t^s$. 因而

$$\mathbb{E}_x[X_t|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}_x[X_s X_t^s|\mathscr{F}_s] = X_s \mathbb{E}X_t^s = X_s.$$

(4) 这一条留待以后再证. 见第八章第 8.5 节. □

§6.4 高维布朗运动

定义 6.11. $B_t^1, \cdots, B_t^d$ 是相互独立的 (标准的) BM, 则 $B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d)$ 称为 d 维布朗运动, 记为 BM^d.

如同一维 BM, BM^d 具有转移概率:

$$p(t, x, \mathrm{d}y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{1}{2t}\sum_{i=1}^{d}(y_i - x_i)^2\right] \mathrm{d}y, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

容易证明定理 6.5 中的诸结论对 BM^d 仍成立.

定理 6.12. 关于 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 和 $\mathbb{P}_x$ $(x \in \mathbb{R})$, 对 $\mathrm{BM}^d B_t$, 下述断言成立.

(1) $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是鞅.

(2) $(|B_t|^2 - dt)_{t\geqslant 0}$ 是鞅, 这里 $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}, x \in \mathbb{R}^d$.

(3) 对每 $\theta \in \mathbb{R}^d$, $\left(\exp\left[\langle\theta, B_t\rangle - \frac{1}{2}t|\theta|^2\right]\right)_{t\geqslant 0}$ 是鞅, 称为**指数鞅** (BM^d的拉氏变换), 这里 $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i, x, y \in \mathbb{R}^d$.

(4) 如$f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ (二阶偏导数连续), f 与 $\Delta f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ 有界, 则

$$\left(f(B_t) - \int_0^t \frac{1}{2}\Delta f(B_u)\mathrm{d}u\right)_{t\geqslant 0}$$

是鞅.

§6.5 补充与习题

1. (a) (X, Y) 是二维的正态分布当且仅当对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha X + \beta Y$ 是正态分布.

   (b) 试举例说明: X, Y 是正态分布,且不相关, 但 X, Y 不独立.

2. 令 $T(\omega) = \{0 \leqslant t \leqslant 1 : B_t(\omega) = 0\}$, 试证明对 $\forall\, \omega \in \Omega, T(\omega)$ 是闭集, 并具有 Lebesgue 零测度.

3. 利用 BM 的重对数律:

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t^{-1}}} = 1, \liminf_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t^{-1}}} = -1,$$

证明: 上题中 $T(\omega)$ 一定是一个无穷集, 并且是一个完全集 (没有孤立点).

4. 命 $\tau_x = \inf\{t \geqslant 0 : B_t = x\}$, $x \in \mathbb{R}$. 试证对于 (标准) BM, τ_x 的分布密度为

$$x(2\pi t^3)^{-1/2}\exp[-x^2/2t].$$

提示: 由上面的性质 (3) 导出

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta x - \frac{1}{2}\theta^2\tau_x\right) : \tau_x < \infty\right] = 1.$$

由此导出 $\mathbb{P}[\tau_x < \infty] = 1$. 再取 $\lambda = \dfrac{1}{2}\theta^2$, 得出 τ_x 的 Laplace 变换

$$\mathbb{E}\exp[-\lambda\tau_x] = \exp[-x(2\lambda)^{1/2}], \qquad \forall\lambda > 0.$$

由此导出结论.

5. 证明概率密度函数

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp[-(x-y)^2/2t]$$

满足热方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

6. 证明对任意的 $t > 0$,

$$\sum_{k=1}^{2^n}[B_{kt/2^n} - B_{(k-1)t/2^n}]^2 \xrightarrow[L^2]{\text{a.s.}} t,\ n \to \infty.$$

从而 BM 在任一有限区间上非有界变差.

7. 证明如下 BM 的 Kolmogorov 不等式:

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|B_s| > r\right] \leqslant \frac{t}{r^2}.$$

8. 证明 Doob L^2 不等式:

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\leqslant s\leqslant t}|B_s|^2\right)\leqslant 4\mathbb{E}B_t^2.$$

9. 令 $W_t=\int_t^0 B_s\mathrm{d}s$.

(a) 证明 $E[W_t]=0$ 及 $E[W_t^2]=t^3/3$.

(b) 求给定 $B_t=x$, W_t 的条件分布.

(c) 证明 (W_t-tB_t) 是鞅.

10. 证明 $B_t^3-3tB_t, B_t^4-6tB_t^2+3t^2,\cdots$ 均是鞅.

11. 设 (B_t) 是 BM, 证明

(a)

$$\mathbb{E}\exp\left[\lambda\int_0^t B_s\mathrm{d}s\right]=\exp(\lambda^2t^3/6);$$

(b)

$$\mathbb{E}\exp\left[\lambda\int_0^t sB_s\mathrm{d}s\right]=\exp(\lambda^2t^5/15).$$

12. 设 (B_t) 是 BM, 令 $X_t=e^{-t}B_{e^{2t}}, t\geqslant 0$, $Y_t=B_t-tB_1, t\in[0,1]$, 计算 $\mathbb{E}X_tX_s, t,s\geqslant 0$ 和 $\mathbb{E}Y_tY_s, s,t\in[0,1]$.

13. 令 $M_t=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}B_s$, 证明

(a) $Y_t=M_t-B_t$ 为马氏过程;

(b) 过程 (Y_t) 与过程 $(|B_t|)$ 等价 (即任意有限维分布相同).

14. 考虑实值连续可积函数 f 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=a>0.$$

定义过程

$$Y_t=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f(B_s)\mathrm{d}s.$$

证明极限 $\lim\limits_{t\to\infty}E[Y_t]$ 与 $\lim\limits_{t\to\infty}E[Y_t^2]$ 存在, 并求其值.

15. 证明定理 6.5 中的 (1) – (3).

16. 设 (B_t) 是 BM, $\mathscr{F}_t=\sigma(B_s, s\leqslant t)$, τ 是关于 $\mathscr{F}_{t+}:=\bigcap\limits_{s>t}\mathscr{F}_s$ 的停时. 令 $\widetilde{B}_t=B_{t+\tau}-B_\tau$, 则 $(\widetilde{B}_t)$ 仍是 BM.

提示: 利用定理 6.3, 使用特征函数证明对任意 $t_1<t_2<\cdots<t_k$, $(\widetilde{B}_{t_1},\cdots,\widetilde{B}_{t_k})$ 与 $(B_{t_1},\cdots,B_{t_k})$ 同分布.

17. 设 (B_t) 是标准的 BM, 令 $\tau = \inf\{t : B_t \notin (a,b)\}(a < 0 < b)$, 利用鞅的停止定理证明 $\mathbb{P}[B_\tau = b] = 1 - \mathbb{P}[B_\tau = a] = -a/(b-a)$.

18. 证明定理 6.12 所列的诸性质.

19. 设 B_t 为 BM, 令 $X_t = e^{B_t}$ 为几何 BM, 计算其扩散系数

$$a(x) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[(X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x]}{h},\ 0 < x < \infty,$$

和漂移系数

$$b(x) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[X_{t+h} - X_t | X_t = x]}{h},\ 0 < x < \infty.$$

20. 设 B_t 为 (标准的) d 维 BM, 令 $R_t = |B_t|$ 为径向 BM.

(a) 证明 R_t 是马氏过程,且转移概率为

$$p(t,x,\mathrm{d}y) = t^{-1}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2t}\right](xy)^{1-d/2} I_{d/2-1}\left(\frac{xy}{t}\right) y^{d-1}\mathrm{d}y,$$

其中 I_ν 为 Bessel 函数

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}.$$

(b) 令 $T = \inf\{t \geqslant 0 : R_t = r\}$, 利用鞅停止定理证明 $\mathbb{E}T = r^2/d$.

第七章　随机积分与扩散过程

§7.1 随 机 积 分

本章的目的是给出如下的积分的定义:

$$\int_0^\infty \phi_t \mathrm{d}B_t, \tag{7.1}$$

其中 B_t 为 Brown 运动, $\phi = (\phi_t)$ 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程, 即 $\phi_t \in \mathscr{F}_t := \sigma\{B_s : s \leqslant t\}$. 回忆定义函数 ψ 的 Riemann 积分 $\int_0^1 \psi_t \mathrm{d}t$ 时, 采用的是 Riemann 和

$$\sum_{i=0}^n \psi_{\theta_i}(t_{i+1} - t_i)$$

逼近. 此处 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1, \theta_i \in [t_i, t_{i+1}]$. 如果 ψ 是随机的, 把 $\psi(\theta_i)$ 理解为在时刻 θ_i 的观测值 (随机变量), 那么上述逼近虽然可以逐点 (逐个 ω) 定义, 但过于粗糙, 因为随机误差被忽略了. 更为细致的逼近应当形如

$$\sum_{i=0}^n [\psi_{\theta_i}(t_{i+1} - t_i) + \phi_{\theta_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})].$$

这里 $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})_{i \geqslant 1}$ 是均值为零, 相互独立的正态分布, 乃是常见的误差形式. 由此可见, 我们需要研究形如

$$\int_0^1 \psi_t \mathrm{d}t + \int_0^1 \phi_t \mathrm{d}B_t$$

的积分. 后一加项即是本章所需要处理的关于BM的随机积分. 由于 Brown 运动的轨道 (即给定 ω, $(B_t(\omega))_{t \geqslant 0}$) 不具有界的变差, 所以不能将上述积分 (7.1) 作为通常的 Lebesgue-Stieltjes 积分 (固定 ω). 为克服这一困难, 历史上曾作过许多努力. 例如 N.Wiener 使用分部积分公式

$$\int_0^1 \phi_t \mathrm{d}B_t = \psi_t B_t |_0^1 - \int_0^1 B_t \phi_t' \mathrm{d}t$$

来定义随机积分 (参考习题 2). 然而, 这种定义方法要求 ϕ_t 绝对连续, 依然不能包括 $\int_0^1 B_t \mathrm{d}B_t$. 因此我们需要在新的收敛意义下, 给出积分 (7.1)的定义. 要点是: 虽然 BM 无界变差, 但二次变差有限. 因而可以在 L^2 等距同构意义下定义随机积分. 这种定义不是逐点的, 而是几乎处处.

令

$$\mathscr{L}^2 = \{\phi = (\phi_t) : \phi \text{ 为适应过程且 } \mathbb{E}\int_0^\infty \phi_t^2 \mathrm{d}t < \infty\}.$$

对 $\phi \in \mathscr{L}^2$, 定义 $||\phi||^2 = \mathbb{E}\int_0^\infty \phi_t^2 \mathrm{d}t$, 则容易验证 $||\cdot||$ 是 $\mathscr{L}^2$ 上的范数 (在等价类的意义下). 这里, 我们直接处理无穷时间区间 $[0,\infty)$, 自然包含有限时间区间情形.

如同通常积分定义方式, 先对 "阶梯形式" 的适应过程进行定义, 再通过取极限的方式扩展到整个 $\mathscr{L}^2$ 上.

设 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$, $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为随机变量, 满足 $\xi_i \in \mathscr{F}_{t_i}$ (留心这里所用的是 t_i 而不是 t_{i+1}, 两者间有重要差别. 参考习题 3 和 4). 令

$$\phi_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{(t_i,t_{i+1}]}(t),\ t \geqslant 0, \tag{7.2}$$

则定义 $\phi = (\phi_t)$ 的随机积分为

$$I_\phi = \int_0^\infty \phi_t \mathrm{d}B_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

对如上定义的随机积分 I_ϕ, 我们有

引理 7.1.

$$\mathbb{E}I_\phi^2 = ||\phi||^2. \tag{7.3}$$

为使对任意的 $\phi \in \mathscr{L}^2$, 定义随机积分 I_ϕ, 我们需要下面的逼近的结论.

命题 7.2. $\forall\, \phi \in \mathscr{L}^2$, 存在形如(7.2)的 "阶梯形式" 的 $\phi^{(n)}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} ||\phi^{(n)} - \phi|| = 0$.

借助命题 7.2, 我们可以定义

定义 7.3. 对 $\phi = (\phi_t) \in \mathscr{L}^2$, 存在形如 (7.2) 的 "阶梯形式" 的 $\phi^{(n)}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} ||\phi^{(n)} - \phi|| = 0$, 则定义 I_ϕ 为 $I_{\phi^{(n)}}$ 在 $L^2(\mathbb{P})$ 下的极限, 即

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(I_\phi - I_{\phi^{(n)}})^2 = 0.$$

容易看到, 定义 7.3 中所定义的随机积分 I_ϕ 在 a.s. 的意义下是唯一的, 而且与 "阶梯形式" 的 $\phi^{(n)}$ 的选取无关.

下面, 我们回头来证明引理 7.1 和命题 7.2.

命题 7.1 的证明 由 (7.2) 及 BM 的独立增量性,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}I_\phi^2 &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right]^2\\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + \sum_{i\neq j}\xi_i\xi_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right]\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\xi_i^2(t_{i+1} - t_i) = \|\phi\|^2. \qquad \square\end{aligned}$$

命题 7.2 的证明 不妨设 ϕ 有界, 否则令 $\phi^{(n)} = \phi \vee n \wedge (-n)$, 易知

$$\|\phi - \phi^{(n)}\| \to 0,\ n \to \infty.$$

a) 设 $|\phi| \leqslant M$ 且 ϕ 关于 t 连续. 对每一 n, 令

$$\phi_t^{(n)} = \begin{cases} n\displaystyle\int_{(j-1)/n}^{j/n}\phi_t \mathrm{d}t, & \text{当 } \dfrac{j}{n} < t \leqslant \dfrac{j+1}{n}, 1 \leqslant j \leqslant n^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\int_{j/n}^{(j+1)/n}|\phi_t^{(n)}|^2\mathrm{d}t = n\left|\int_{(j-1)/n}^{j/n}\phi_t\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_{(j-1)/n}^{j/n}\phi_t^2\mathrm{d}t,$$

从而

$$\int_T^\infty |\phi_t^{(n)}|^2\mathrm{d}t \leqslant \int_{T-2/n}^\infty \phi_t^2\mathrm{d}t. \tag{7.4}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^\infty|\phi_t - \phi_t^{(n)}|^2\mathrm{d}t &= \int_0^T|\phi_t - \phi_t^{(n)}|^2\mathrm{d}t + \int_T^\infty|\phi_t - \phi_t^{(n)}|^2\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^T|\phi_t - \phi_t^{(n)}|^2\mathrm{d}t + 4\int_{T-2/n}^\infty\phi_t^2\mathrm{d}t. \end{aligned}\tag{7.5}$$

注意到由 ϕ 的连续性知 ϕ 在 $[0,T]$ 上一致连续且有界, 因此命 $n \to \infty$, (7.5) 中的第一项趋于 0. 再注意到 $\int_0^\infty \phi_t^2\mathrm{d}t < \infty, \text{a.s.}$, 因此再命 $T \to \infty$ 可知当 $n \to \infty$ 时,

$$\int_0^\infty |\phi_t - \phi_t^{(n)}|^2\mathrm{d}t \to 0,\ \text{a.s.}$$

再由 (7.4) 可得

$$\int_0^\infty |\phi_t - \phi_t^{(n)}|^2 \mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^\infty |\phi_t|^2 \mathrm{d}t < \infty,$$

从而由控制收敛定理知 $\|\phi - \phi^{(n)}\| \to 0$.

b) 设 $|\phi| \leqslant M$. $\forall n$, 令 ψ_n 为 $\mathbb{R}$ 上非负连续函数满足: (i) $\psi_n(t) = 0, t \leqslant -1/n$ 或 $t \geqslant 0$, (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t)\mathrm{d}t = 1$. 令

$$\phi_t^{(n)} = \int_0^t \psi_n(s-t)\phi_s \mathrm{d}s.$$

则 $\phi^{(n)}$ 连续, 且 $|\phi_t^{(n)}| \leqslant M$. 容易看到 $\phi_t^{(n)} \in \mathscr{F}_t$, 且

$$\int_0^\infty |\phi_t - \phi_t^{(n)}|^2 \mathrm{d}t \to 0,\ n \to \infty.$$

从而由控制收敛定理得到 $\|\phi - \phi^{(n)}\| \to 0$. □

随机积分的性质

命题 7.4. 对 $\phi \in \mathscr{L}^2$, 定义

$$X_t = \int_0^t \phi_s \mathrm{d}B_s := \int_0^\infty \phi_s \mathrm{d}B_{s\wedge t},$$

它具有如下性质:

(1) X_t 关于 t 连续;

(2) $(X_t, \mathscr{F}_t)$ 是鞅, 从而 $\mathbb{E}X_t = 0$;

(3) 令

$$Y_t = \int_0^t \psi_s \mathrm{d}B_s,$$

则

$$\mathbb{E}X_tY_t = \mathbb{E}\int_0^t \phi_s\psi_s \mathrm{d}s,$$

从而 $\forall\, \phi \in \mathscr{L}^2, \|\phi\|^2 = \mathbb{E}I_\phi^2$;

(4) 对任意的 $a(\omega), b(\omega) \in \mathscr{F}_s$, 有

$$\int_s^t (a\phi_u + b\psi_u)\mathrm{d}B_u = a\int_s^t \phi_u \mathrm{d}B_u + b\int_s^t \psi_u \mathrm{d}B_u.$$

§7.2 Itô 公 式

如同微积分中微分的连锁法则, 我们需要随机积分中的相应的法则, 即所谓 Itô 公式.

设 u 是 $\mathscr{F}_t$ 适应的, $v \in \mathscr{L}^2$, 令

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s \mathrm{d}s + \int_0^t v_s \mathrm{d}B_s, \tag{7.6}$$

或形式地写成

$$\mathrm{d}X_t = u_t \mathrm{d}t + v_t \mathrm{d}B_t. \tag{7.7}$$

定理 7.5. 设 X_t 如 (7.6) (或 (7.7)), 设函数 $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 二次连续可导. 令 $Y_t = f(t, X_t)$, 则

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)(\mathrm{d}X_t)^2,$$

其中 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}B_t$ 的平方和乘积由乘法表

乘积	$\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}B_t$
$\mathrm{d}t$	0	0
$\mathrm{d}B_t$	0	t

给出. 即

$$\mathrm{d}Y_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + u_t\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2}v_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\right]\mathrm{d}t + v_t\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\mathrm{d}B_t.$$

证明 不妨假设

$$f, \ \frac{\partial f}{\partial t}, \ \frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

均有界. 取 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, 由 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \sum_i \Delta f(t_i, X_i) \\ &= f(0, X_0) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x}\Delta X_i + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\Delta t_i)^2 \\ &\quad + \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(\Delta t_i)(\Delta X_i) + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta X_i)^2 + \sum_i R_i, \end{aligned}$$

其中

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \ \Delta X_i = X_{t_{i+1}} - X_{t_i}, \ \Delta g(t_i, X_i) = g(t_{i+1}, X_{t_{i+1}}) - g(t_i, X_{t_i}),$$

且 $R_i = o(|\Delta t_i|^2 + |\Delta X_i|^2)$.

如果 $|\Delta t_i| \to 0$, 则

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, X_{t_i})\Delta t_i \xrightarrow{L^2} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\mathrm{d}s, \tag{7.8}$$

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x}\Delta X_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, X_{t_i})\Delta X_i \xrightarrow{L^2} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\mathrm{d}X_s. \tag{7.9}$$

同时

$$\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta X_i)^2 = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_i^2(\Delta t_i)^2 + 2\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_i v_i(\Delta t_i)(\Delta B_i)$$
$$+ \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}v_i^2(\Delta B_i)^2. \tag{7.10}$$

当 $|\Delta t_i| \to 0$ 时, 上式的前两项趋于零, 而最后一项在 L^2 意义下趋于

$$\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)v_s^2\mathrm{d}s.$$

事实上, 记 $a(t) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)v^2(t), a_i = a(t_i)$. 考虑

$$\mathbb{E}\left(\sum_i a_i(\Delta B_i)^2 - \sum_i a_i\Delta t_i\right)^2 = \sum_{i,j}\mathbb{E}[a_i a_j((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)].$$

当 $i > j$ 时, $a_i a_j((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)$ 与 $(\Delta B_j)^2 - \Delta t_j$ 独立, 其期望为零. 同样地, 当 $i < j$ 时, 期望也为零. 于是当 $|\Delta t_i| \to 0$ 时,

$$\sum_i \mathbb{E}a_i^2\left((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i\right)^2 = 2\sum_i \mathbb{E}a_i^2(\Delta t_i)^2 \to 0,$$

即在 $L^2(\mathbb{P})$ 意义下

$$\sum_i a_i(\Delta B_i)^2 \to \int_0^t a(s)\mathrm{d}s.$$

同样可以证明当 $|\Delta t_i| \to 0$ 时, $\sum_i R_i \to 0$. □

高维的 Itô 公式 设 $B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d)^{\mathrm{T}}$ 是 d 维 BM, 令

$$\mathrm{d}X_t^i = b_i(t, X_t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, X_t)\mathrm{d}B_t^j, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

此处我们仅陈述高维的 Itô 公式, 更详细的讨论见下一章.

定理 7.6. 设 $f=(f_1,\cdots,f_m):[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 二次连续可导, 令 $Y_t=f(t,X_t)$, 则对 $1\leqslant i\leqslant m$,

$$\mathrm{d}Y_t^i=\frac{\partial f_i}{\partial t}(t,X_t)\mathrm{d}t+\sum_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,X_t)\mathrm{d}X_t^j+\sum_{j,k}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(t,X_t)\mathrm{d}X_t^j\mathrm{d}X_t^k.$$

其中 $\mathrm{d}B_t^j\mathrm{d}B_t^k=\delta_{jk}\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}t\mathrm{d}t=0$, $\mathrm{d}t\mathrm{d}B_t^j=0$.

§7.3 随机微分方程

随机微分方程 (SDE) 形如

$$\mathrm{d}X_t=b(t,X_t)\mathrm{d}t+\sigma(t,X_t)\mathrm{d}B_t. \tag{7.11}$$

其积分形式为

$$X_t=X_0+\int_0^t b(t,X_t)\mathrm{d}t+\int_0^t\sigma(t,X_t)\mathrm{d}B_t. \tag{7.12}$$

此方程的解 X_t 称为 **Itô 过程**, 或**扩散过程**. 下面我们讨论 SDE 的解的存在性和唯一性.

定理 7.7. 设上述 b,σ 满足

$$|b(t,x)|+|\sigma(t,x)|\leqslant C(1+|x|), \tag{7.13}$$

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leqslant C|x-y|. \tag{7.14}$$

则 SDE (7.11) (或 (7.12)) 存在唯一的解 X_t, 且 X_t 关于 t 连续.

证明 a) 先证唯一性. 设 $X_t,\widetilde{X}_t$ 均为 SDE 的解, 满足初值条件 $X_0=Z,\widetilde{X}_0=\widetilde{Z}$. 令 $\alpha_t=b(t,X_t)-b(t,\widetilde{X}_t),\beta_t=\sigma(t,X_t)-\sigma(t,\widetilde{X}_t)$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t-\widetilde{X}_t|^2&=\mathbb{E}\left[Z-\widetilde{Z}+\int_0^t\alpha_s\mathrm{d}s+\int_0^t\beta_s\mathrm{d}B_s\right]^2\\&\leqslant 3\mathbb{E}\left[Z-\widetilde{Z}\right]^2+3\mathbb{E}\left[\int_0^t\alpha_s\mathrm{d}s\right]^2+3\mathbb{E}\left[\int_0^t\beta_s\mathrm{d}B_s\right]^2\\&\leqslant 3\mathbb{E}\left[Z-\widetilde{Z}\right]^2+3t\mathbb{E}\left[\int_0^t\alpha_s^2\mathrm{d}s\right]+3\mathbb{E}\left[\int_0^t\beta_s^2\mathrm{d}s\right]\\&\leqslant 3\mathbb{E}\left[Z-\widetilde{Z}\right]^2+3(1+t)C^2\int_0^t\mathbb{E}|X_s-\widetilde{X}_s|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

于是由 Gronwall 引理 (见习题 15) 得到

$$\mathbb{E}|X_t-\widetilde{X}_t|^2\leqslant 3\mathbb{E}[Z-\widetilde{Z}]^2e^{3(1+t)C^2t}.$$

若 $Z=\widetilde{Z}$, 则对所有 $t\geqslant 0$, $\mathbb{E}|X_t-\widetilde{X}_t|^2=0$, 从而

$$\mathbb{P}[\text{对所有有理数 } t, X_t=\widetilde{X}_t]=1.$$

再由连续性, 有

$$\mathbb{P}[\forall\, t, X_t=\widetilde{X}_t]=1.$$

b) 再证存在性, 仍使用通常的迭代法. 命 $Y_t^{(0)}=X_0$, 并归纳地定义

$$Y_t^{(k+1)}=X_0+\int_0^t b\left(s,Y_s^{(k)}\right)\mathrm{d}s+\int_0^t \sigma\left(s,Y_s^{(k)}\right)\mathrm{d}B_s,\quad k\geqslant 0.$$

如前所证, 我们有

$$\mathbb{E}\left|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\right|^2\leqslant 3(1+t)C^2\int_0^t \mathbb{E}\left|Y_s^{(k)}-Y_s^{(k-1)}\right|^2\mathrm{d}s,\quad k\geqslant 1,$$

且存在只依赖于 C,t 和 $\mathbb{E}X_0^2$ 的常数使得

$$\mathbb{E}\left|Y_t^{(1)}-Y_t^{(0)}\right|^2\leqslant At.$$

因此

$$\mathbb{E}\left|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\right|^2\leqslant\frac{(At)^{k+1}}{(k+1)!},\quad k\geqslant 0. \tag{7.15}$$

注意

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|Y_s^{(k+1)}-Y_s^{(k)}\right|\leqslant&\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\int_0^s\left|b\left(r,Y_r^{(k)}\right)-b\left(r,Y_r^{(k-1)}\right)\right|\mathrm{d}r\\&+\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^s\left[\sigma(r,Y_r^{(k)})-\sigma(r,Y_r^{(k-1)})\right]\mathrm{d}B_r\right|.\end{aligned}$$

则由鞅不等式 (推论 5.9) 和引理 7.1,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|Y_s^{(k+1)}-Y_s^{(k)}\right|\geqslant 2^{-k}\right]\\
\leqslant&\,\mathbb{P}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\int_0^s\left|b\left(r,Y_r^{(k)}\right)-b\left(r,Y_r^{(k-1)}\right)\right|\mathrm{d}r\geqslant 2^{-k-1}\right]\\
&+\mathbb{P}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^s\left[\sigma\left(r,Y_r^{(k)}\right)-\sigma\left(r,Y_r^{(k-1)}\right)\right]\mathrm{d}B_r\right|\geqslant 2^{-k-1}\right]\\
\leqslant&\,4^{k+1}\mathbb{E}\left|\int_0^t b\left(r,Y_r^{(k)}\right)-b\left(r,Y_r^{(k-1)}\right)\mathrm{d}r\right|^2\\
&+4^{k+1}\mathbb{E}\left|\int_0^t \sigma\left(r,Y_r^{(k)}\right)-\sigma\left(r,Y_r^{(k-1)}\right)\mathrm{d}B_r\right|^2\\
\leqslant&\,4^{k+1}t\mathbb{E}\int_0^t\left|b\left(r,Y_r^{(k)}\right)-b\left(r,Y_r^{(k-1)}\right)\right|^2\mathrm{d}r\\
&+4^{k+1}\int_0^t\mathbb{E}\left|\sigma(r,Y_r^{(k)})-\sigma(r,Y_r^{(k-1)})\right|^2\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

再由条件 (7.13) 及 (7.14),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|Y_s^{(k+1)}-Y_s^{(k)}\right|\geqslant 2^{-n}\right]&\leqslant 4^{k+1}C^2(1+t)\int_0^t\mathbb{E}\left|Y_r^{(k)}-Y_r^{(k-1)}\right|^2\mathrm{d}r\\&\leqslant 4^{k+1}C^2(1+t)\int_0^t\frac{(At)^k}{k!}\mathrm{d}r\\&\leqslant 4^{k+1}C^2(1+t)\frac{A^kt^{k+1}}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|Y_s^{(k+1)}-Y_s^{(k)}\right|\geqslant 2^{-k}\right]<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理知

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|Y_s^{(k+1)}-Y_s^{(k)}\right|\geqslant 2^{-k},\text{i.o.}\right]=0,$$

从而对几乎所有的 ω,

$$Y_t^{(n)}(\omega)=Y_t^{(0)}(\omega)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(Y_t^{(k+1)}(\omega)-Y_t^{(k)}(\omega)\right)$$

收敛. 记 X_t 为此极限, 则由 $Y_t^{(n)}$ 关于 t 的连续性可知 X_t 的连续性. 另外由 b 和 σ 的连续性有

$$b\left(s,Y_s^{(n)}\right)\to b(s,X_s),\ \sigma\left(s,Y_s^{(n)}\right)\to\sigma(s,X_s),\ n\to\infty.$$

于是

$$\int_0^t b\left(s,Y_s^{(n)}\right)\mathrm{d}s\to\int_0^t b(s,X_s)\mathrm{d}s,$$

及由控制收敛定理和引理 7.1 知在 $L^2(\mathbb{P})$ (从而在几乎处处) 意义下

$$\int_0^t\sigma\left(s,Y_s^{(n)}\right)\mathrm{d}s\to\int_0^t\sigma(s,X_s)\mathrm{d}s.$$

因此 X_t 满足 SDE (7.12). □

§7.4　一维扩散过程

本节中, 我们用随机微分方程的方法讨论一维扩散过程.

设 $I=(\ell,r)$ 为直线上的一个开区间 $(-\infty\leqslant\ell<r\leqslant\infty)$. 设 $\sigma(x)$ 与 $b(x)$ 是 I 上的 C^1 函数, 且对所有 $x\in I$, $\sigma^2(x)>0$. 则随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=\sigma(X_t)\mathrm{d}B_t+b(X_t)\mathrm{d}t\\X_0=x\end{cases}\tag{7.16}$$

在爆炸时间 $e = \lim\limits_{n\uparrow\infty} \tau_n$ 之前有唯一解 X_t^x, 这里 $\tau_n = \inf\{t : X_t^x \notin [a_n, b_n]\}$ (选取 a_n, b_n 使得 $\ell < a_n < b_n < r$ 且 $a_n \downarrow \ell$, $b_n \uparrow r$).

可以证明在集合 $[e < \infty]$ 上, 极限 $\lim\limits_{t\uparrow e} X_t^x$ 存在且几乎处处等于 ℓ 或 r. 由此, 在集合 $\{e < \infty\}$ 上, 对 $t \geqslant e$, 定义 X_t^x 为此极限. 若记

$$L = a(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad a(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x), \tag{7.17}$$

则称 $(X_t^x)_{t\geqslant 0}$ 为最小 L 扩散.

唯一性

所谓唯一性, 是指此最小 L 扩散过程是随机微分方程 (7.16) 的唯一解, 也就是说 $\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1$, $\forall\, x \in I$. 下面我们给出唯一性的显式表示.

固定 $c \in I$, 置

$$\kappa(x) = \int_c^x s(\xi)M(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad x \in I, \tag{7.18}$$

其中

$$M(\xi) = \int_c^\xi \exp\left[\int_c^y \frac{b(z)}{a(z)}\mathrm{d}z\right]\frac{\mathrm{d}y}{a(y)}.$$

再置

$$S(x) = \int_c^x \exp\left[-\int_c^y \frac{b(z)}{a(z)}\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y. \tag{7.19}$$

则易见 $S(x)$ 是 I 上的严格增函数且在 I 上满足

$$LS(x) = 0. \tag{7.20}$$

事实上, 从 (7.20) 容易解出 S 的表达式.

引理 7.8. 设 $u(x)$ 为下列方程的唯一解:

$$Lu(x) = u(x),\ u(c) = 1,\ u'(c) = 0. \tag{7.21}$$

则

$$1 + \kappa(x) \leqslant u(x) \leqslant \exp(\kappa(x)),\ x \in I. \tag{7.22}$$

定理 7.9.

(1) 若 $\kappa(r-) = \kappa(\ell+) = \infty$, 则对所有 $x \in I$,

$$\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1. \tag{7.23}$$

(2) 若 $\kappa(r-)<\infty$ 或 $\kappa(\ell+)<\infty$, 则对所有 $x\in I$,

$$\mathbb{P}_x[e<\infty]>0. \tag{7.24}$$

证明 (1) 使用 Itô 公式知

$$\mathrm{d}e^{-t}u(X_t)=e^{-t}u'(X_t)\sigma(X_t)\mathrm{d}B_t$$

为鞅, 从而 Doob 停止定理知 $e^{-t\wedge\tau_n}u(X_{t\wedge\tau_n})$ 是鞅. 让 $n\to\infty$ 得到 $Y_t:=e^{-t\wedge e}u(X_{t\wedge e})$ 是非负上鞅. 从而 $\mathbb{E}Y_t\leqslant\mathbb{E}Y_0=1$.

若 $\kappa(r-)=\kappa(\ell+)=\infty$, 由引理 7.8 知 $u(r-)=u(\ell+)=\infty$, 从而 $\mathbb{P}_x[e=\infty]=1$. 否则 $\exists K<\infty$ 使 $\mathbb{P}_x[e\leqslant K]>0$, 则

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}Y_t\geqslant\liminf_{t\to\infty}\int_{[e\leqslant K]}e^{-t\wedge e}u(X_{t\wedge e})\mathrm{d}\mathbb{P}=\infty.$$

这是不可能的.

(2) 不妨设 $\kappa(r-)<\infty$ 且 $c<x$. 令 $\eta=\inf\{t:X_t=c\}$, 则由引理 7.8 知 $e^{-t\wedge\eta\wedge e}u(X_{t\wedge\eta\wedge e})$ 是有界鞅, 从而

$$u(x)=\mathbb{E}_x[e^{-t\wedge\eta\wedge e}u(X_{t\wedge\eta\wedge e})].$$

让 $t\to\infty$ 有

$$u(x)=\mathbb{E}_x[e^{-e}u(r-);\lim_{t\to e\wedge\eta}X_t=r]+\mathbb{E}_x[e^{-\eta}u(c);\lim_{t\to e\wedge\eta}X_t=c].$$

因此必有 $\mathbb{E}_x[e^{-e};\lim_{t\to e\wedge\eta}X_t=r]>0$ (从而 $\mathbb{P}_x[e<\infty]>0$). 否则, 如果 $\mathbb{E}_x[e^{-e};\lim_{t\to e\wedge\eta}X_t=r]=0$, 则

$$u(x)=\mathbb{E}_x[e^{-\eta}u(c);\lim_{t\to e\wedge\eta}X_t=c]\leqslant u(c),$$

这与 u 的单调性矛盾. □

常返性

记 $T_y=\inf\{t\geqslant 0:X_t=y\},y\in I$. 扩散过程 X_t 称为常返的, 如果对所有 $x,y\in I$, $\mathbb{P}_x[T_y<\infty]=1$.

定理 7.10.

(1) 如果 $S(\ell+)=-\infty$ 且 $S(r-)=\infty$, 则对每一 $x\in I$, 都有

$$\mathbb{P}_x[e=\infty]=\mathbb{P}_x\left[\limsup_{t\uparrow\infty}X_t=r\right]=\mathbb{P}_x\left[\liminf_{t\uparrow\infty}X_t=\ell\right]=1. \tag{7.25}$$

(2) 如果 $S(\ell+) > -\infty$ 且 $S(r-) = \infty$, 则 $\lim_{t\uparrow e} X(t)$ $\mathbb{P}_x$-a.s. 存在, 且对每一 $x \in I$, 都有

$$\mathbb{P}_x\left[\lim_{t\uparrow e} X_t = \ell\right] = \mathbb{P}_x\left[\sup_{t<e} X_t < r\right] = 1. \tag{7.26}$$

对换 ℓ 与 r, 类似的结论同样成立.

(3) 如果 $S(\ell+) > -\infty$ 且 $S(r-) < \infty$, 则 $\lim_{t\uparrow e} X(t)$ $\mathbb{P}_x$-a.s. 存在, 且对每一 $x \in I$, 都有

$$\mathbb{P}_x\left[\lim_{t\uparrow e} X_t = \ell\right] = 1 - \mathbb{P}_x\left[\lim_{t\uparrow e} X_t = r\right] = \frac{S(r-) - S(x)}{S(r-) - S(\ell+)}. \tag{7.27}$$

更进一步, 我们有

定理 7.11. 对所有 $x \in I$, $\mathbb{P}_x(e < \infty) = 1$ 当且仅当下列情形之一成立:

(1) $\kappa(r-) < \infty$ 且 $\kappa(\ell+) < \infty$;

(2) $\kappa(r-) < \infty$ 且 $S(\ell+) = -\infty$;

(3) $\kappa(\ell+) < \infty$ 且 $S(r-) = \infty$.

定理 7.10–7.11 的证明可参考文献 [35, §6.3].

遍历性

I 上的概率测度 π 称为 X_t 的平稳分布, 如果初始分布 $X_0 \sim \pi$, 则对任意的时刻 $t \geqslant 0$, 都有 $X_t \sim \pi$, 即对 I 中的任一 Borel 集 B,

$$\pi(B) = \int_I P_t(x, B)\pi(\mathrm{d}x),$$

其中 $P_t(x, B) = \mathbb{P}_x[X_t \in B]$.

设 $\pi(\mathrm{d}x) = \pi(x)\mathrm{d}x$, 即 π关于 Lebesgue 测度具有密度函数 $\pi(x)$, 则

$$\pi(y) = \int_I p_t(x, y)\pi(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $p_t(x, y)$ 是 $P_t(x, \mathrm{d}y)$ 关于 Lebesgue 测度的转移密度函数.

事实上, 一维扩散过程是可配称的, 即存在测度 μ 使得

$$\int_I fLg\mathrm{d}\mu = \int_I gLf\mathrm{d}\mu, \ \forall\ f, g \in C^2(I). \tag{7.28}$$

从而若 $\mu(I) < \infty$, 则可得到平稳分布.

可以验证,

$$\mu(A)=\int_A\frac{\mathrm{d}y}{a(y)}\exp\left[\int_c^x\frac{b(z)}{a(z)}\mathrm{d}z\right]$$

满足 (7.28), 其中 $c\in I$ 任意. 从而若

$$Z=\int_I\frac{\mathrm{d}y}{a(y)}\exp\left[\int_c^x\frac{b(z)}{a(z)}\mathrm{d}z\right]<\infty,\tag{7.29}$$

则

$$\pi(y)=\frac{1}{Za(y)}\exp\left[\int_c^x\frac{b(z)}{a(z)}\mathrm{d}z\right]$$

即为平稳分布. 因此扩散过程 X_t 遍历当且仅当

$$\kappa(\ell+)=\kappa(r-)=\infty\ \text{且}\ \int_I\frac{\mathrm{d}y}{a(y)}\exp\left[\int_c^x\frac{b(z)}{a(z)}\mathrm{d}z\right]<\infty.$$

第一特征值估计

令 $L=a(x)\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+b(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 考虑半直线 $[0,D)(D\leqslant\infty)$ 上的 L 扩散过程. 我们考虑 Neumann 边界条件的第一特征值的估计问题. 假定 $a(x)>0$ 且由 (7.29) 定义的 $Z<\infty$, 其中 $I=(0,D)$. 即扩散过程 X_t 是遍历的. 记 $C(x)=\int_0^x b/a$, 并置

$$\pi(\mathrm{d}x)=\frac{1}{Za(x)}\exp[C(x)]\mathrm{d}x.$$

在 $L^2(\pi)$ 上, 算子 L 有平凡的特征值 $\lambda_0=0$, 我们感兴趣的是下一个特征值 λ_1, 即所谓的 (非平凡) 第一特征值, 对于有限区间 $(D<\infty)$ 且系数连续情形, 此即是特征方程 $Lf=-\lambda f$ 对非常数的 f 成立的最小的 λ. 一般情形的 λ_1 由经典的变分公式 (极小极大定理) 来定义:

$$\lambda_1=\inf\{D(f,f):f\in C^1[0,D),\ \pi(f)=0,\ \pi(f^2)=1\},$$

这里 $D(f,f)=\int_0^D a(x)f'(x)^2\pi(\mathrm{d}x)$, $\pi(f)=\int_0^D f\mathrm{d}\pi$.

定理 7.12. 令 $\mathscr{F}=\{f:f'(x)>0,\ x\in(0,D),\ \pi(f)\geqslant 0\}$. 则

$$\lambda_1\geqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\inf_{x\in(0,D)}\left[\frac{e^{-C(x)}}{f'(x)}\int_x^D\frac{f(u)e^{C(u)}}{a(u)}\mathrm{d}u\right]^{-1}.\tag{7.30}$$

进一步, 若系数 a 和 b 连续, 则 (7.30) 中的等式成立.

证明 对 $f\in\mathscr{F}$, 记

$$I(f)(x)=\frac{e^{-C(x)}}{f'(x)}\int_x^D\frac{f(u)e^{C(u)}}{a(u)}\mathrm{d}u.$$

令 $g \in C^1[0,D)$ 满足 $\pi(g)=0, \pi(g^2)=1$. 则对任一 $f \in \mathscr{F}$, 有

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}\int_0^D \pi(\mathrm{d}x)\pi(\mathrm{d}y)[g(y)-g(x)]^2 \\
&= \int_{[x\leqslant y]} \pi(\mathrm{d}x)\pi(\mathrm{d}y)\left(\int_x^y g'(u)\sqrt{f'(u)}/\sqrt{f'(u)}\mathrm{d}u\right)^2 \\
&\leqslant \int_{[x\leqslant y]} \pi(\mathrm{d}x)\pi(\mathrm{d}y)\int_x^y g'(u)^2 f'(u)^{-1}\mathrm{d}u\int_x^y f'(u)\mathrm{d}u \\
&\qquad\qquad (\text{由 Cauchy-Schwarz 不等式}) \\
&= \int_{[x\leqslant y]} \pi(\mathrm{d}x)\pi(\mathrm{d}y)\int_x^y a(u)g'(u)^2 e^{C(u)}\frac{e^{-C(u)}}{a(u)f'(u)}\mathrm{d}u[f(y)-f(x)] \\
&= \int_0^D a(u)g'(u)^2\pi(\mathrm{d}u)\frac{Ze^{-C(u)}}{a(u)f'(u)}\int_0^u \pi(\mathrm{d}x)\int_u^D \pi(\mathrm{d}y)[f(y)-f(x)]. \quad (7.31)
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&\int_0^u \pi(\mathrm{d}x)\int_u^D \pi(\mathrm{d}y)[f(y)-f(x)] \\
&= \int_0^u \pi(\mathrm{d}x)\int_u^D f(y)\pi(\mathrm{d}y) - \int_0^u f(x)\pi(\mathrm{d}x)\int_u^D \pi(\mathrm{d}y) \\
&= \int_u^D f(u)\pi(\mathrm{d}y) - \int_u^D \pi(\mathrm{d}x)\int_u^D f(y)\pi(\mathrm{d}y) - \int_0^u f(x)\pi(\mathrm{d}x)\int_u^D \pi(\mathrm{d}y) \\
&= \int_u^D f(y)\pi(\mathrm{d}y) - \int_u^D \pi(\mathrm{d}x)\int_0^D f(y)\pi(\mathrm{d}y) \quad (\text{因 } \pi(f)\geqslant 0) \\
&\leqslant \int_u^D f(y)\pi(\mathrm{d}y) = \frac{1}{Z}\int_u^D \frac{f(y)e^{C(y)}}{a(y)}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

此式结合 (7.31) 得到

$$
\int_0^D a(x)g'(x)^2\pi(\mathrm{d}x) \geqslant \inf_{x\in(0,D)} I(f)(x)^{-1}.
$$

先对 $g \in C^1[0,D), \pi(g)=0, \pi(g^2)=1$ 取下确界, 再对 $f \in \mathscr{F}$ 取上确界立得 (7.30).

欲使 (7.30) 成为等式, 需要更多关于特征函数的知识, 可参考文献 [13, Proposition 6.4, Lemma 6.2], [8, 定理 1.1 的证明] 和 [9]. □

§7.5 补充与习题

1. 直接计算积分: (a) $\int_0^t B_s\mathrm{d}B_s$, (b) $\int_0^t s\mathrm{d}B_s$.

2. 设 $\phi_s(\omega) \equiv \phi_s, \forall\, s \geqslant 0$, f 在 $[0,t]$ 内有有界变差, 证明

$$\int_0^t \phi_s \mathrm{d}B_s = tB_t - \int_0^t B_s \mathrm{d}\phi_s.$$

3. 设 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1, \theta_i \in (t_i, t_{i+1}]$. 命 $\xi_t^{(n)} = B_{\theta_i}$, 如 $t \in (t_i, t_{i+1}]$. 试证当分划 $\{t_0, t_1, \cdots, t_{n+1}\}$ 的直径趋于零时, 以概率1有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \left|\xi_t^{(n)} - B_t\right| \to 0,\ n \to \infty.$$

但当变动 $\{\theta_i\}_{i\geqslant 1}$ 时, 和数

$$\mathbb{E}\sum_{k=0}^{n} B_{\theta_k}\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right) = \sum_{k=0}^{n}(\theta_k - t_k)$$

的极限点可以充满 $[0,1]$.

4. 改用对称和

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$$

逼近来定义随机积分, 称为 Stratonovich 积分, 记作 $\int_0^\infty \phi_t \circ \mathrm{d}B_t$. 微分形式记为 $\phi_t \circ \mathrm{d}B_t$. 试证此时 Itô 公式取通常形式, 如 $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 关于 t 一次连续可导, 关于 x 三次连续可导, $Y_t = f(t, X_t)$, 则

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x} \circ \mathrm{d}X_t.$$

这种积分的优点是对称性, 缺点是关于 f 的条件稍强. 在具体计算时还需回到 Itô 积分.

5. 证明命题 7.4 中诸项.

提示: 由引理 7.1 和命题 7.2 及第五章习题 19, 只需对 ϕ 为 "阶梯函数" 加以证明.

6. 设 $B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d)$ 是 d 维 BM, 令 $R_t = |B_t|$ 是径向过程, 则

$$R_t \mathrm{d}R_t = \sum_{i=1}^{d} B_t^i \mathrm{d}B_t^i + \frac{n-1}{2}\mathrm{d}t.$$

7. 考虑如下 Langevin 方程:

$$\mathrm{d}X_t = \sigma \mathrm{d}B_t - bX_t \mathrm{d}t,$$

其中 σ, b 为常数.

(a) 利用 Itô 公式求解此方程.

提示: 考虑函数 $f(t,x) = e^{bt}x$.

(b) 给定 $X_0 = x$, 求出 X_t 的分布 $P(t,x,\cdot)$.

(c) 若 $\sigma^2 = 1, b = 1/2$, 证明 $\lim_{t\to\infty} P(t,x,\cdot)$ 是标准正态分布.

8. 给定常数 α, β, 证明如下线性人口方程

$$\mathrm{d}N_t = \alpha N_t \mathrm{d}B_t + \beta N_t \mathrm{d}t,\ t \geqslant 0$$

的解是 $N_t = N_0 e^{bt+\alpha B_t}$, 其中 $b = \beta - \alpha^2/2$.

提示: 考虑函数 $f(t,x) = e^{bt+\alpha x}$.

9. 考虑如下非随机的两个方程的解.

(a) 证明 $\mathrm{d}X_t = X_t^2 \mathrm{d}t, X_0 = 0$ 的唯一解为

$$X_t = \frac{1}{1-t},\ 0 \leqslant t < 1.$$

于是当 $t \uparrow 1$, $X_t \to \infty$ (爆炸).

(b) 证明 $\mathrm{d}X_t = 3X_t^{2/3}\mathrm{d}t, X_0 = 0$ 的解非唯一. 事实上, $\forall\ a > 0$,

$$X_t = \begin{cases} (t-a)^3, & t > a; \\ 0, & t \leqslant a \end{cases}$$

都是方程的解.

10. 证明 $\mathrm{d}X_t = cX_t^r \mathrm{d}t$ 的解非爆炸当且仅当 $r > 1$.

11. 设 $\phi \in \mathscr{L}^2$, 令 $X_t = \int_0^t \phi_s \mathrm{d}B_s$, 则 $\forall\ \lambda, T > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |X_t| > \lambda\right] \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\int_0^T \phi_s^2 \mathrm{d}s.$$

12. 令 $\mathrm{d}X_t = \mu_1(t,X_t)\mathrm{d}t + \sigma_1(t,X_t)\mathrm{d}B_t$, $\mathrm{d}Y_t = \mu_2(t,Y_t)\mathrm{d}t + \sigma_2(t,Y_t)\mathrm{d}B_t$, 证明

(a) $\mathrm{d}X_t^2 = \sigma_1(t,X_t)^2\mathrm{d}t + 2X_t\mathrm{d}X_t$;

(b) $\mathrm{d}(X_tY_t) = X_t\mathrm{d}Y_t + Y_t\mathrm{d}X_t + \sigma_1(t,X_t)\sigma_2(t,Y_t)\mathrm{d}t$.

13. 令 $Y_t = \exp(\mu t + \sigma B_t), \mu, \sigma \in \mathbb{R}$, 计算 $\mathrm{d}Y_t$.

14. 令 $Y_t = e^{iB_t}$, 则 $Y_t = X_t^{(1)} + iX_t^{(2)}$ 满足

$$\mathrm{d}X_t^{(1)} = -\frac{1}{2}X_t^{(1)}\mathrm{d}t - X_t^{(2)}\mathrm{d}B_t,\ \mathrm{d}X_t^{(2)} = -\frac{1}{2}X_t^{(2)}\mathrm{d}t + X_t^{(1)}\mathrm{d}B_t.$$

15. (Gronwall 引理) 设 ϕ 和 f 是 $[0,\infty)$ 上的 Borel 非负函数, 满足

$$\phi(t) \leqslant c + \int_0^t f(s)\phi(s)\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0,$$

其中 $c \geqslant 0$ 为常数. 则

$$\phi(t) \leqslant c\exp\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right],\ t \geqslant 0.$$

(此引理的最新的推广见 [48].)

16. 证明如下的一维扩散过程非爆炸:

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t.$$

17. 证明: $\forall\, f \in C^2((\ell, r))$

$$Lf(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}M(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S(x)}f(x),\ x \in (\ell, r).$$

18. 证明引理 7.8.

提示: 先证明 (7.21) 等价于

$$u(x) = 1 + \int_c^x \mathrm{d}S(x)\int_c^y u(z)\mathrm{d}M(z),$$

再用迭代法 $u(x) \equiv 0, u_n(x) = \int_c^x \mathrm{d}S(x)\int_c^y u_{n-1}(z)\mathrm{d}M(z)$, 有 $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

19. 证明定理 7.10.

提示: 考虑 $\mathrm{d}S(X_t)$.



第八章　半鞅与随机积分

§8.1　Doob-Meyer 分解的唯一性

本节的目的是为建立更为一般的随机积分和研究随机微分方程作准备.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间, $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为上升 σ 域流. Doob-Meyer 分解定理说的是: 每一下鞅 $(X_t, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ 必定可表成:

$$X_t = M_t + A_t,$$

其中 $(M_t, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ 为鞅, 而 (A_t) 为增过程:

$$s \leqslant t \Longrightarrow A_s \leqslant A_t, \qquad \text{a.s.}$$

但我们这里只处理一种特殊情形: 设 $(X_t, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ 为鞅, 且右连续、循序可测 (简称为**右循**. 注意对于右连续过程, 由适应性可推出循序可测), 则 $(X_t^2, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ 为下鞅, 我们要证明形如

$$X_t^2 = M_t + A_t$$

的分解. 对于 $X_t = B_t$ 的特殊情形, 由于 $B_t^2 - t$ 是鞅, 因而我们已有分解:

$$M_t = B_t^2 - t, \qquad A_t = t.$$

我们先研究分解的唯一性, 随后再讨论分解的存在性. 自此以后, 总假定所涉及的鞅和下鞅为右循. 下述结果是一种分部积分公式 (又见本章习题 1).

引理 8.1. 设 $(X_t, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ 为鞅. $A: [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$, 右循、a.s. 连续且局部有界变差 (即除一零测集外, $A(\bullet, \omega)$ 在有限时间区间 $[0,T]$ 上的全变差 $|A|(T,\omega) < \infty$). 假如

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t|\Big)\big(|A|(T) + |A_0|\big)\Big] < \infty, \qquad \forall T > 0.$$

则 $\left(X_tA_t - \int_0^t X_s A(\mathrm{d}s), \mathscr{F}_t, \mathbb{P}\right)$ 是鞅.

证明 给定 $0 \leqslant s < t$ 和 $\Gamma \in \mathscr{F}_s$. 记 $u_{n,k} = s + \frac{k}{n}(t-s)$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[X_t A_t - X_s A_s; \Gamma] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(X_{u_{n,k+1}} A_{u_{n,k+1}} - X_{u_{n,k}} A_{u_{n,k}}\right); \Gamma\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} X_{u_{n,k+1}} \left[A_{u_{n,k+1}} - A_{u_{n,k}}\right]; \Gamma\right]. \ (\text{由鞅性})
\end{aligned}$$

由于 $u \to X_u$ 右连续, $u \to A_u$ a.s. 连续且局部有界变差, 从而

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[X_{u_{n,k+1}} \left(A_{u_{n,k+1}} - A_{u_{n,k}}\right)\right] \to \int_0^t X_s A(\mathrm{d}s), \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

再由所设条件知, 此收敛实质上是 $L^1(\mathbb{P})$. □

自此以后, 对局部有限变差函数 f, 我们以 $|f|(T)$ 表 f 限于 $[0,T]$ 上的全变差.

引理 8.2. 设 $(X_t, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ 为 a.s. 连续鞅. 定义 $\zeta = \sup\{t \geqslant 0 : |X|(t) < \infty\}$. 则以概率 1 有 $X_{t\wedge\zeta} = X_0$, $t \geqslant 0$. 特别地, 如果对一切 $0 \leqslant s < t$, $\mathbb{P}[X_t = X_s] = 0$, 则以概率 1, $t \to X_t$ 在任何区间上非有界变差.

证明 不失一般性, 可设 $X_0 \equiv 0$ 且 X_t 处处连续. 定义

$$\begin{aligned}
\zeta_R &= \sup\{t \geqslant 0 : |X|(t) < R\}, \\
&= \inf\{t \geqslant 0 : |X|(t) \geqslant R\} \ (\text{留心 } |X|(t) \text{ 关于 } t \text{ 上升}), \quad R > 0.
\end{aligned}$$

则 ζ_R 为停时且当 $R \uparrow \infty$ 时, $\zeta_R \uparrow \zeta$. 由引理 8.1 和 Doob 停止定理知

$$\left(X_{t\wedge\zeta_R}^2 - \int_0^{t\wedge\zeta_R} X_s X(\mathrm{d}s), \mathscr{F}_t, \mathbb{P}\right)$$

是鞅. 因而

$$\mathbb{E}X_{t\wedge\zeta_R}^2 = \mathbb{E}\int_0^{t\wedge\zeta_R} X_s X(\mathrm{d}s).$$

另一方面, 由于 $X_{\bullet\wedge\zeta_R}$ a.s. 连续且局部有界变差,

$$X_{t\wedge\zeta_R}^2 = 2\int_0^{t\wedge\zeta_R} X_s X(\mathrm{d}s), \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

由以上两式得出

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}X_{t\wedge\zeta_R}^2 = 0, \qquad \forall t \geqslant 0 \\
&\Longrightarrow X_{t\wedge\zeta_R} = 0, \qquad t \geqslant 0, \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \\
&\Longrightarrow X_{t\wedge\zeta} = 0 = X_0, \qquad t \geqslant 0, \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.}
\end{aligned}$$

为证明后一断言, 令

$$ {}^{s}X_{\bullet} = X_{\bullet} - X_{\bullet\wedge s}, \qquad s \geqslant 0. $$

我们只需证明: 对于一切 $t > s$,

$$ |{}^{s}X|(t) = \infty, \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} $$

为此, 命

$$ {}^{s}\zeta = \sup\{u \geqslant 0 : |{}^{s}X|(u) < \infty\}. $$

则

$$ \mathbb{P}[|{}^{s}X|(t) < \infty] = \mathbb{P}[{}^{s}\zeta > t]. $$

把前一断言应用于过程 ${}^{s}X$, 得出

$$ \begin{aligned} & {}^{s}X_{t\wedge {}^{s}\zeta} = {}^{s}X_0 = 0, \qquad \text{a.s.} \\ & \Longrightarrow {}^{s}X_t = 0, \text{ 在 } [{}^{s}\zeta > t] \text{ 上}, \qquad \text{a.s.} \\ & \Longrightarrow X_t = X_s, \text{ 在 } [{}^{s}\zeta > t] \text{ 上}, \qquad \text{a.s.} \\ & \Longrightarrow \mathbb{P}[{}^{s}\zeta > t] \leqslant \mathbb{P}[X_t = X_s] = 0. \qquad \square \end{aligned} $$

推论 8.3. 给定 $(X_t)_{t\geqslant 0}$. 则可能除一个零集外, 至多只有一个右循 (A_t) 使

(1) $A_0 \equiv 0$, (A_t) a.s. 连续且局部有限变差;

(2) $(X_t - A_t, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ 是鞅.

证明 假若有两个 (A_t) 和 (A'_t) 满足上述条件, 则应用引理 8.2 于过程 $(A_t - A'_t)_{t\geqslant 0}$ 得出

$$ A_t - A'_t = A_0 - A'_0 = 0, \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \qquad \square $$

§8.2 Doob-Meyer 分解的存在性

定理 8.4 (Doob-Meyer). 设 $(X_t, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ 为 a.s. 连续 $L^2(\mathbb{P})$ 鞅. 则存在 $\mathbb{P}$-a.s. 唯一的右循 (A_t), 使得

(1) $A_0 = 0$, A_t 非减, a.s. 连续,

(2) $(X_t^2 - A_t, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ 是鞅.

证明 唯一性见上面的推论, 往证存在性. 不失一般性, 可设 $X_0 \equiv 0$. 定义停时列 (τ_k^n) 如次:

$$\tau_k^0 = k, \qquad k \geqslant 0; \qquad (\Longrightarrow \tau_k^0 < \tau_{k+1}^0)$$

$$\tau_0^n \equiv 0, \qquad n \geqslant 1;$$

$$\tau_{\ell+1}^n = \Big(\inf\Big\{t \geqslant \tau_\ell^n : \sup_{\tau_\ell^n \leqslant s \leqslant t} |X_s - X_{\tau_\ell^n}| \geqslant 1/n\Big\}\Big) \wedge (\tau_\ell^n + 1/n) \wedge \tau_{k+1}^{n-1},$$

$$\text{如 } \tau_k^{n-1} \leqslant \tau_\ell^n < \tau_{k+1}^{n-1}, \qquad \ell \geqslant 0,\ n \geqslant 1.$$

对 n 使用归纳法易见, $\tau_k^n < \tau_{k+1}^n$, $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ 而且 $\{\tau_k^n\} \subset \{\tau_k^{n+1}\}$, $\mathbb{P}$-a.s. 此外, 由 a.s. 连续性知

$$\text{当}k \to \infty \text{ 时}, \ \tau_k^n \to \infty, \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

$$\tau_k^n \leqslant t \leqslant \tau_{k+1}^n \Longrightarrow |X_t - X_{\tau_k^n}| \leqslant 1/n, \qquad k \geqslant 0,\ \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

取序列 $K_n \uparrow \infty$ 使得 $\mathbb{P}[\tau_{K_n}^n \leqslant n] \leqslant 1/n$ 并定义

$$M_t^n = \sum_{k=0}^{K_n} X_{\tau_k^n}\Big(X_{t\wedge\tau_{k+1}^n} - X_{t\wedge\tau_k^n}\Big), \qquad A_t^n = \sum_{k=0}^{K_n}\Big(X_{t\wedge\tau_{k+1}^n} - X_{t\wedge\tau_k^n}\Big)^2.$$

容易验证下述事实:

(a) $M_0^n = A_0^n = 0$, $n \geqslant 0$;

(b) $(M_t^n, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ 为 a.s. 连续鞅;

(c) $A_t^n \geqslant 0$ 右循, a.s. 连续; 如 $t \geqslant s + 1/n$, 则$A_s^n \leqslant A_t^n$; (注意若 s, t 属同一 $[\tau_k^n, \tau_{k+1}^n)$, 则未必有此增性质.)

(d) $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant n$, $\omega \in \Lambda_n := [\tau_{K_n}^n > n]$,

$$X_t(\omega)^2 = 2M_t^n(\omega) + A_t^n(\omega).$$

往证: 对任给的 $T > 0$ 和 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n \geqslant m} \mathbb{P}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |M_t^n - M_t^m| \geqslant \varepsilon\Big] = 0.$$

为此, 设 $n > m \geqslant T$, 并命 $\zeta = T \wedge \tau_{K_m}^m \wedge \tau_{K_n}^n$. 则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |M_t^n - M_t^m| \geqslant \varepsilon\Big] \\
&\leqslant \mathbb{P}[\tau_{K_m}^m \leqslant m \text{ 或 } \tau_{K_n}^n \leqslant n] + \mathbb{P}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |M_{t\wedge\zeta}^n - M_{t\wedge\zeta}^m| \geqslant \varepsilon\Big] \\
&\leqslant 2/m + \mathbb{E}\big[(M_\zeta^n - M_\zeta^m)^2\big]/\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

最后一步用到 Doob 不等式. 定义 $\rho_k = \tau_k^m \wedge \zeta$, $\sigma_\ell = \tau_\ell^n \wedge \zeta$. 由于 $m < n$, $\{\rho_k\} \subset \{\sigma_\ell\}$. 由定义, 并注意到 $\zeta \leqslant \tau_m^m \wedge \tau_n^n$ 和 $\{\rho_k\} \subset \{\sigma_\ell\}$, 则有

$$
\begin{aligned}
M_\zeta^n - M_\zeta^m &= \sum_{\ell=0}^{K_n} X_{\tau_\ell^n}\Big(X_{\zeta\wedge\tau_{\ell+1}^n} - X_{\zeta\wedge\tau_\ell^n}\Big) - \sum_{\ell=0}^{K_m} X_{\tau_k^m}\Big(X_{\zeta\wedge\tau_{k+1}^m} - X_{\zeta\wedge\tau_k^m}\Big) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} X_{\sigma_\ell}\Big(X_{\sigma_{\ell+1}} - X_{\sigma_\ell}\Big) - \sum_{\ell=0}^{\infty} X_{\rho_k}\Big(X_{\rho_{k+1}} - X_{\rho_k}\Big) \\
&= \sum_{k,\ell=0}^{\infty} I_{[\rho_k,\rho_{k+1})}(\sigma_\ell) X_{\sigma_\ell}\Big(X_{\sigma_{\ell-1}} - X_{\sigma_\ell}\Big) \\
&\quad - \sum_{k,\ell=0}^{\infty} I_{[\rho_k,\rho_{k+1})}(\sigma_\ell) X_{\rho_k}\Big(X_{\sigma_{\ell+1}} - X_{\sigma_\ell}\Big) \\
&= \sum_{k,\ell=0}^{\infty} I_{[\rho_k,\rho_{k+1})}(\sigma_\ell)\Big(X_{\sigma_\ell} - X_{\rho_k}\Big)\Big(X_{\sigma_{\ell+1}} - X_{\sigma_\ell}\Big), \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.}
\end{aligned}
$$

由鞅性知, 上述双重和数各项在 $L^2(\mathbb{P})$ 中两两正交, 因而

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(M_\zeta^n - M_\zeta^m)^2\big] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k,\ell=0}^{\infty} I_{[\rho_k,\rho_{k+1})}(\sigma_\ell)\Big(X_{\sigma_\ell} - X_{\rho_k}\Big)^2\Big(X_{\sigma_{\ell+1}} - X_{\sigma_\ell}\Big)^2\Big] \\
&\leqslant \frac{1}{m^2}\mathbb{E}\Big[\sum_{k,\ell=0}^{\infty} I_{[\rho_k,\rho_{k+1})}(\sigma_\ell)\Big(X_{\sigma_{\ell+1}} - X_{\sigma_\ell}\Big)^2\Big] \\
&= \frac{1}{m^2}\mathbb{E}\Big[\sum_{\ell=0}^{\infty}\Big(X_{\sigma_{\ell+1}} - X_{\sigma_\ell}\Big)^2\Big] \\
&= \frac{1}{m^2}\mathbb{E}(X_\zeta^2) \ (\text{由正交性}) \\
&\leqslant \frac{1}{m^2}\mathbb{E}(X_T^2) < \infty.
\end{aligned}
$$

这便证得所述断言.

现在, 让我们使用下述引理来完成存在性证明.

引理 8.5. 设 (X_t^n) 右循、a.s. 连续, 取值于 $\mathbb{R}^d$. 如果

$$
\lim_{m\to\infty}\sup_{n\geqslant m}\mathbb{P}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\big|X_t^n - X_t^m\big| \geqslant \varepsilon\Big] = 0.
$$

则存在右循、a.s. 连续的 (X_t), 使得

$$
\lim_{n\to\infty}\sup_{n\geqslant m}\mathbb{P}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\big|X_t^n - X_t\big| \geqslant \varepsilon\Big] = 0, \qquad T > 0,\ \varepsilon > 0.
$$

此引理是一种随机的完备性, 其证明冗长, 此处从略. 详见参考文献 [57, 引理 4.3.3].

至此, 我们已证得: 存在右循、a.s. 连续的 (M_t) 使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{n\geqslant m}\mathbb{P}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|M_t^n - M_t|\geqslant\varepsilon\Big]=0,\qquad T>0,\ \varepsilon>0.$$

特别地, 对每一固定的 t, $M_t^n\xrightarrow{\mathbb{P}}M_t$. 上述证明实际上还给出 $M_t^n\xrightarrow{L^1(\mathbb{P})}M_t$. 因而 $(M_t,\mathscr{F}_t,\mathbb{P})$ 是 a.s. 连续鞅.

最后, 命 $A'=X^2-2M$. 则 A' 右循. 另一方面, 由上面的 d) 知,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{n\geqslant m}\mathbb{P}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|A_t^n - A_t'|\geqslant\varepsilon\Big]=0,\qquad T>0,\ \varepsilon>0.$$

进而由上面的 a) 和 c) 知

$$A_0'=0,\qquad A_t'\ 非减,\qquad \text{a.s.}$$

这样, 只需取

$$A_0\equiv 0,\qquad A_t=\sup_{0\leqslant s<t}(A_s'-A_0'),\qquad t>0,$$

便得出所欲求者. □

定义 8.6. 记 $\mathscr{M}_c^2$ 为 a.s. 连续实 $L^2(\mathbb{P})$ 鞅 $(X_t,\mathscr{F}_t,\mathbb{P})$ 的全体. 对于 $X=(X_t)\in\mathscr{M}_c^2$, 命 $\langle X\rangle=(\langle X\rangle(t))$ 为上述分解定理中所得到的增过程, 称为**二次变差过程**. 再命

$$\langle X,Y\rangle=\frac{1}{4}(\langle X+Y\rangle-\langle X-Y\rangle),\qquad X,Y\in\mathscr{M}_c^2.$$

并称之为**联合二次变差过程**.

引理 8.7. $\langle X,Y\rangle$ 右循、a.s. 连续、局部有界变差, 进而 $\langle X,Y\rangle(T)\in L^1(\mathbb{P})$, $T\geqslant 0$.

证明 因为 $\langle X\rangle(T)=|A|(T)=A_T=X_T^2-M_T$, $\mathbb{E}|A|(T)=\mathbb{E}A_T=\mathbb{E}X_T^2<\infty$. 从而 $\langle X\pm Y\rangle(T)\in L^1(\mathbb{P})$. □

§8.3 变差过程的性质

定理 8.8. 给定 $X,Y\in\mathscr{M}_c^2$, 则 $\langle X,Y\rangle$ 是 a.s. 唯一的右循、局部有界变差、a.s. 连续的过程, 使得 $\langle X,Y\rangle(0)\equiv 0$ 且

$$(X_tY_t-\langle X,Y\rangle(t),\ \mathscr{F}_t,\ \mathbb{P})$$

为鞅. 特别地, 对于 $X,Y,Z\in\mathscr{M}_c^2$, 有

(1) $\langle X\rangle = \langle X, X\rangle$, a.s.

(2) 线性性: $\langle aX + bY, Z\rangle = a\langle X, Z\rangle + b\langle Y, Z\rangle$, a.s.

(3) Schwarz 不等式: $|\langle X,Y\rangle|(\Gamma) \leqslant \langle X\rangle(\Gamma)^{1/2}\langle Y\rangle(\Gamma)^{1/2}$ a.s. $\Gamma \in \mathscr{B}([0,\infty))$; (从而 $|\langle X,Y\rangle|(\Gamma) \leqslant \frac{1}{2}\big(\langle X\rangle(\Gamma) + \langle Y\rangle(\Gamma)\big)$)

(4) Minkowski 不等式: $\langle X + Y\rangle(\Gamma) \leqslant \langle X\rangle(\Gamma)^{1/2} + \langle Y\rangle(\Gamma)^{1/2}$, a.s.

证明 第一项断言即是引理 8.7. 我们只证 (3), 其它断言或由唯一性导出或可类似地证明. 为此, 只需验证:

$$|\langle X,Y\rangle(t) - \langle X,Y\rangle(s)| \leqslant (\langle X\rangle(t) - \langle X\rangle(s))^{1/2}(\langle Y\rangle(t) - \langle Y\rangle(s))^{1/2}, \qquad \text{a.s.}$$

以 ${}^sX$ 和 ${}^sY$ 分别代替 X 与 Y, 归结为

$$|\langle X,Y\rangle(t)| \leqslant \langle X\rangle(t)^{1/2}\langle Y\rangle(t)^{1/2}, \qquad \text{a.s.}$$

其证明是内积与范数关系的典型手法. 由线性性

$$0 \leqslant \langle \lambda X \pm Y/\lambda\rangle(t) = \lambda^2\langle X\rangle(t) \pm 2\langle X,Y\rangle(t) + \langle Y\rangle(t)/\lambda^2, \qquad \text{a.s.}, \quad \lambda > 0$$

得出

$$|\langle X,Y\rangle(t)| \leqslant \frac{1}{2}\big[\lambda^2\langle X\rangle(t) + \langle Y\rangle(t)/\lambda^2\big], \qquad \text{a.s.}$$

取 λ 使右方最小: $\lambda^2 = \big(\langle Y\rangle(t)/\langle X\rangle(t)\big)^{1/2}$, 得出所欲证者. □

§8.4 随机积分

给定右循、非减、a.s. 连续的 $A = (A_t)$, 记

$$L^2_{\ell oc}(A,\mathbb{P}) = \left\{\alpha : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}, \text{循序可测且 } \mathbb{E}\int_0^T \alpha_t^2 A(\mathrm{d}t) < \infty, \forall T > 0\right\}.$$

对于给定的 $X \in \mathscr{M}_c^2$, $\alpha \in L^2_{\ell oc}(\langle X\rangle,\mathbb{P})$, 我们将证明存在唯一的 $I:\ [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ 使得

(1) $I(0) = 0,\ I \in \mathscr{M}_c^2$;

(2) $\langle I, Y\rangle(\mathrm{d}t) = \alpha\langle X,Y\rangle(\mathrm{d}t)$, a.s. $\forall Y \in \mathscr{M}_c^2$.

唯一性证明 假定有两个 I 和 I' 满足上述条件, 则对一切 $Y \in \mathscr{M}_c^2$, $\langle I - I', Y\rangle \equiv 0$, a.s. 特别地, 取 $Y = I - I'$, 则 $\langle I - I'\rangle = 0$, a.s. 因而

$$\mathbb{E}[I(T) - I'(T)^2] = \mathbb{E}[M_T] + \mathbb{E}\langle I - I'\rangle(T) = \mathbb{E}M_T = \mathbb{E}(M_0) = 0.$$

故 $I = I'$, a.s. □

定义 8.9. 上述 I 称为 α 关于 X 的 Itô **随机积分**, 记作 $I = \alpha_\bullet X = \int_0^\bullet \alpha_t \mathrm{d}X_t$.

与第七章不同, 这里是公理化定义而非构造性.

引理 8.10. 如 $I_\alpha = \alpha_\bullet X$ 存在, 则 $\mathbb{E}[I_\alpha(T)^2] = \mathbb{E}\Big[\int_0^T \alpha_t^2 \langle X\rangle(\mathrm{d}t)\Big]$.

证明 由条件 (2) 知 $\langle I_\alpha, Y\rangle = \alpha\langle X, Y\rangle$, $\forall Y \in \mathscr{M}_c^2$. 因而 $\langle I_\alpha, I_\alpha\rangle = \alpha\langle X, I_\alpha\rangle = \alpha^2\langle X\rangle$. 进而

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \alpha_t \mathrm{d}X_t\right)^2\right] = \mathbb{E}[M(T)] + \mathbb{E}[\langle I_\alpha, I_\alpha\rangle(T)]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_0^T \alpha_t^2 \langle X\rangle(\mathrm{d}t)\right]. \qquad \square$$

引理 8.11 (线性性). 设 $\alpha, \beta \in L^2_{\ell oc}(\langle X\rangle, \mathbb{P}), \alpha_\bullet X$ 和 $\beta_\bullet X$ 存在, 则 $(a\alpha + b\beta)_\bullet X$ 也存在且

$$(a\alpha + b\beta)_\bullet X = a(\alpha_\bullet X) + b(\beta_\bullet X), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

进而

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}((\alpha_\bullet X)_t - (\beta_\bullet X)_t)^2\Big] \leqslant 4\mathbb{E}\left[\int_0^T (\alpha_t - \beta_t)^2 \langle X\rangle(\mathrm{d}t)\right], \ T > 0.$$

证明 只证后者. 由 Doob 不等式

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}((\alpha_\bullet X)_t - (\beta_\bullet X)_t)^2\Big] \leqslant 4\mathbb{E}\big[((\alpha_\bullet X)_T - (\beta_\bullet X)_T)^2\big]$$
$$= 4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \alpha_t \mathrm{d}X_t - \int_0^T \beta_t \mathrm{d}X_t\right)^2\right]$$
$$= 4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (\alpha_t - \beta_t)\mathrm{d}X_t\right)^2\right] \ (\text{线性性})$$
$$= 4\mathbb{E}\left[\int_0^T (\alpha_t - \beta_t)^2 \langle X\rangle(\mathrm{d}t)\right].$$

其中最后一步用到引理 8.10. $\square$

现在转入研究随机积分的存在性. 我们回到了第七章的构造性手法. 先看一特殊情形.

定理 8.12. 对一切 $\alpha \in L^2_{\ell oc}(\langle X\rangle, \mathbb{P})$, $\alpha_\bullet X$ 存在.

证明 先考虑简单的 α: 即存在 $n \geqslant 1$ 使

$$\alpha_t = \alpha_{[nt]/n}, \ t \geqslant 0.$$

命

$$I(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k/n}\left[X_{t\wedge\frac{k+1}{n}}-X_{t\wedge\frac{k}{n}}\right].$$

则 $I\in\mathscr{M}_c^2$. 此外, 若 $\frac{k}{n}\leqslant s\leqslant\frac{k+1}{n}$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I(t)Y_t-I(s)Y_s|\mathscr{F}_s]&=\mathbb{E}[(I(t)-I(s))(Y_t-Y_s)|\mathscr{F}_s]\\&=\alpha_{k/n}\mathbb{E}[(X_t-X_s)(Y_t-Y_s)|\mathscr{F}_s]\\&=\alpha_{k/n}\mathbb{E}[X_tY_t-X_sY_s|\mathscr{F}_s]\\&=\mathbb{E}[(\alpha\langle X,Y\rangle)(t)-(\alpha\langle X,Y\rangle)(s)|\mathscr{F}_s],\qquad\text{a.s.}\end{aligned}$$

换言之,

$$\langle I,Y\rangle=\alpha\langle X,Y\rangle,\qquad\text{a.s.},\qquad Y\in\mathscr{M}_c^2.$$

故 $\alpha_\bullet X$ 存在且等于如上定义的 I.

今设 α 有界、循序可测且 a.s. 连续. 取

$$\alpha_t^{(n)}=\alpha_{[nt]/n},$$

则 $\alpha^{(n)}\xrightarrow{\text{a.s.}}\alpha$, 而且由前一引理和控制收敛定理得出

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_0^t\alpha_u^{(n)}\mathrm{d}X_u-\int_0^t\alpha_u^{(m)}\mathrm{d}X_u\right)^2\right]\\\leqslant&\mathbb{E}\left[\int_0^T(\alpha_t^{(n)}-\alpha_t)^2\langle X\rangle(\mathrm{d}t)\right]\to0,\ n\to\infty\end{aligned}$$

因此, 可定义 $\int_0^\bullet\alpha_u\mathrm{d}X_u$ 为 $\int_0^\bullet\alpha_u^{(n)}\mathrm{d}X_u$ 的极限. 我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_0^t\alpha_u^{(n)}\mathrm{d}X_u-\int_0^t\alpha_u\mathrm{d}X_u\right)^2\right]\\\leqslant&\ 4\mathbb{E}\left[\int_0^T(\alpha_t^{(n)}-\alpha_t)^2\langle X\rangle(\mathrm{d}t)\right]\to0,\ n\to\infty.\end{aligned}$$

为完成一般情形 $\alpha_\bullet X$ 的构造, 只需使用如下的逼近.

引理 8.13. 设 $A:[0,\infty)\times\Omega\to[0,\infty)$ 非减、a.s.连续、循序可测且 $A(0)\equiv0$. 给定 $\alpha\in L^2_{\ell oc}(A,\mathbb{P})$, 则存在有界、a.s.连续的序列$\{\alpha^{(n)}\}\subset L^2_{\ell oc}(A,\mathbb{P})$, 使得

$$\alpha^{(n)}\xrightarrow{L^2_{\ell oc}(A,\mathbb{P})}\alpha.$$

证明 由于 $L^2_{\ell oc}(A,\mathbb{P})$ 中的有界元素之集显然在 $L^2_{\ell oc}(A,\mathbb{P})$ 中稠, 可设 α 有界.

先考虑 $A_t \equiv t\ (t \geqslant 0)$ 的简单情形. 取 $\rho \in C_0^\infty(0,1)$ 使 $\int \rho(t)\mathrm{d}t = 1$ ($\mathbb{R}^d$ 上的软化子ρ:

$$\rho(x) = \begin{cases} c\exp\left[\dfrac{1}{|x|^2-1}\right], & \text{如 } |x| < 1; \\ 0, & \text{如 } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

其中 c 为归一化常数. 注意 $\operatorname{supp}\rho$ 被包含于中心在原点的单位球内). 把 α 扩充为 $\mathbb{R}\times\Omega$ 上的函数: $\alpha_t \equiv 0$, 如 $t < 0$. 定义 $\alpha_t^{(n)} = n\int \alpha_{t-s}\rho(ns)\mathrm{d}s$, $n \geqslant 1$. 易证 $\alpha^{(n)}$ 即为所求.

今考虑一般情形, 只需证明: 对每 $T > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在有界、a.s. 连续的 $\bar{\alpha} \in L_{\ell oc}^2(A,\mathbb{P})$ 使

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (\alpha_t - \bar{\alpha}_t)^2 A(\mathrm{d}t)\right] < \varepsilon^2.$$

给定 $T, \varepsilon > 0$, 取 $M > 1$ 使

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \alpha_t^2 A(\mathrm{d}t);\ A_T \geqslant M-1\right] < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

再取 $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ 使

$$I_{[0,M-1]} \leqslant \eta \leqslant I_{[-1,M]}.$$

命

$$D(t) = \int_0^t \eta(A_s)^2 A(\mathrm{d}s) + t, \qquad \tau(t) = D^{-1}(t)\ (\text{反函数}), \qquad t \geqslant 0.$$

(在 $D(t)$ 定义中加 t 一项是为保证 $D(t)$ 严格上升, 从而保证了反函数的单调性.) 则 $\{\tau_t\}_{t\geqslant 0}$ 是有界停时的非减族. 置

$$\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{\tau(t)}, \qquad \beta_t = \alpha_{\tau(t)}.\ (\text{时间变换})$$

由于 β 有界、$(\mathscr{G}_t)$ 循序可测, 因而由前段知, 存在有界连续、$(\mathscr{G}_t)$ 循序可测的 $\bar{\beta}$ 使

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T+M} \left(\beta_t - \bar{\beta}_t\right)^2 \mathrm{d}t\right] < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

最后, 命 $\bar{\alpha}_t = \bar{\beta}_{D(t)}\eta(A_t)$. 则 $\bar{\alpha}$ 是有界、a.s. 连续的 $L_{\ell oc}^2(A,\mathbb{P})$ 中元. 而且

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^T (\alpha_t - \bar{\alpha}_t)^2 A(\mathrm{d}t)\right]^{1/2} \\ \leqslant\ &\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\alpha_t - \bar{\beta}_{D(t)}\eta(A_t)\right)^2 A(\mathrm{d}t)\right]^{1/2} \\ \leqslant\ &\mathbb{E}\left[\int_0^T \alpha_t^2\left(1-\eta(A_t)\right)^2 A(\mathrm{d}t)\right]^{1/2} + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\alpha_t - \bar{\beta}_{D(t)}\right)^2 \eta(A_t)^2 A(\mathrm{d}t)\right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\alpha_t - \bar{\beta}_{D(t)}\right)^2 D(\mathrm{d}t)\right]^{1/2}$$

$$\left(\text{因 } \alpha_t = \alpha_{D^{-1}(D(t))} = \alpha_{\tau(D(t))} = \beta_{D(t)}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\beta_{D(t)} - \bar{\beta}_{D(t)}\right)^2 D(\mathrm{d}t)\right]^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \mathbb{E}\left[\int_0^{T+M} (\beta_t - \bar{\beta}_t)^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

§8.5 Itô 公 式

下面是比定理 7.6 更广一些的 Itô 公式.

定理 8.14 (Itô 公式). 设 $X = (X^1, \cdots, X^M) \in (\mathscr{M}_c^2)^M$; $Y : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^N$, a.s. 连续、循序可测、局部有界变差:

$$|Y|(T) \equiv \left(\sum_1^N |Y^j|(T)^2\right)^{1/2} \in L^1(\mathbb{P}), \qquad \forall T > 0.$$

记 $Z = (X, Y)$. 则对每 $f \in C_b^{2,1}(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N)$, 我们有

$$f(Z_T) - f(Z_0) = \sum_{i=1}^M \int_0^T \partial_i^x f(Z_t) \mathrm{d}X_t^i \qquad \text{(一阶导数关于鞅的积分)}$$

$$+ \sum_{j=1}^N \int_0^T \partial_j^y f(Z_t) Y^j(\mathrm{d}t) \qquad \text{(一阶导数关于变差过程的积分)}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \int_0^T \partial_{ij}^x f(Z_t) \langle X^i, X^j \rangle(\mathrm{d}t), \text{ a.s.}$$

$$\left(\text{二阶导数关于二次变差过程的积分, 系数} \frac{1}{2}\right)$$

注 8.15. 当 $Y \equiv 0$ 时, 右方第二项消失. 进一步考虑 $M = 1$ 的决定性情形, 则

$$f(X_T) - f(X_0) = \int_{X_0}^{X_T} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \mathrm{d}x = \int_0^T \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X_t) \mathrm{d}X_t.$$

这是经典的微积分基本公式. 在随机情形, 多了一个二次变差项 $\langle , \rangle$. 换言之, 在随机微积分里, 随机过程不能只用一阶微分逼近. 必需用到二阶微分. 相应地, 如考虑随机的微分几何,只考虑一阶向量场不够, 因需要用到二阶微分,故也称为 "二阶的微分几何", 而决定性情形是 "一阶的微分几何".

作为随机积分的基本公式, Itô 公式有无数的应用. 仅举一例. 设 $B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d)$ 为 d 维 BM, 则由 Itô 公式知, 对一切 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 我们有

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i^x f(B_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \partial_{ij}^x f(B_s)\langle B^i, B^j\rangle(\mathrm{d}s).$$

但

$$\langle B^i, B^j\rangle = 0\,, \qquad i \neq j. \ \text{(由独立性)}$$

故

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i^x f(B_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)\mathrm{d}s.$$

由此立知, $\left(f(B_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)\mathrm{d}s, \mathscr{F}_t, \mathbb{P}\right)$ 是鞅. 这是前面曾提到、但未加证明的 BM^d 的一种鞅刻画. 以后还将给出一种更一般的结果.

Itô 公式的证明 记 $\langle\langle X, X\rangle\rangle(t,\omega) = (\langle X^i, X^j\rangle(t,\omega) : 1 \leqslant i,j \leqslant M)$. 无妨设 $t \to Z_t(\omega)$, $t \to \langle\langle X, X\rangle\rangle(t,\omega)$ 对一切 $\omega \in \Omega$ 连续, 而且 $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{N+N})$. 给定 $n \geqslant 1$, 定义停时列 τ_k^n 如下:

$$\tau_0^n \equiv 0,$$

$$\tau_{k+1}^n = \inf\left\{t \geqslant \tau_k^n : \left(\max_{1\leqslant i\leqslant M}\left(\langle X^i\rangle(t) - \langle X^i\rangle(\tau_k^n)\right)\right) \vee |Z_t - Z_{\tau_k^n}| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \wedge \left(\tau_k^n + \frac{1}{n}\right) \wedge T.$$

则对一切 $T > 0$ 和 $\omega \in \Omega$, 除有限多个 k 外, $\tau_k^n = T$. 因此

$$f(Z_T) - f(Z_0) = \sum_{k=0}^\infty [f(Z_{k+1}^n) - f(Z_k^n)],$$

此处

$$Z_k^n = (X_k^n, Y_k^n) := Z_{\tau_k^n}.$$

留意 $g(Y_{k+1}^n) - g(Y_k^n) = \sum\limits_{j=1}^N \int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n} \partial_j^y g(Y_t) Y^j(\mathrm{d}t)$. 事实上, 因

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(X_t) = \sum_{j=1}^N \partial_j g(Y_t)\frac{\mathrm{d}Y^j}{\mathrm{d}t},$$

得出

$$g(Y_{t_2}) - g(Y_{t_1}) = \sum_{j=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \partial_j g(Y_t)\left(\frac{\mathrm{d}Y^j}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \partial_j g(Y_t) Y^j(\mathrm{d}t),$$

此处用到 Y_t^j 有界变差.

因此, 我们得出下述分解.

$$
\begin{aligned}
& f(Z_{k+1}^n) - f(Z_k^n) \\
&= [f(X_{k+1}^n, Y_k^n) - f(X_k^n, Y_k^n)] + [f(X_{k+1}^n, Y_{k+1}^n) - f(X_{k+1}^n, Y_k^n)] \\
&= \sum_{i=1}^M \partial_i^x f(Z_k^n)\Delta_k^n X^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \partial_{ij}^x f(Z_k^n)\Delta_k^n\langle X^i, X^j\rangle \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n} \partial_j^y f(X_{k+1}^n, Y_t) Y^j(\mathrm{d}t) + R_k^n,
\end{aligned}
$$

此处 $\Delta_k^n\xi = \xi(\tau_{k+1}^n) - \xi(\tau_k^n)$,

$$
\begin{aligned}
R_k^n = &\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \left[\partial_{ij}^x f(\hat{Z}_k^n) - \partial_{ij}^x f(Z_k^n)\right]\Delta_k^n X^i \Delta_k^n X^j \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M [\partial_{ij}^x f(Z_k^n)(\Delta_k^n X^i \Delta_k^n X^j - \Delta_k^n\langle X^i, X^j\rangle),
\end{aligned}
$$

为 (X_{k+1}^n, Y_k^n) 和 (X_k^n, Y_k^n) 连线上的一个点.

作为初等函数的随机积分, 我们有

$$
\sum_{k=0}^\infty \partial_i^x f(Z_k^n)\Delta_k^n X^i = \int_0^T \partial_i^x f(Z_t^n)\mathrm{d}X_t^i,
$$

此处

$$
Z_t^n = \begin{cases} Z_k^n, & \text{如 } t \in [\tau_k^n, \tau_{k+1}^n); \\ Z_T, & \text{如 } t \geqslant T. \end{cases}
$$

因为对 $t \in [0, T]$ 一致地有 $Z_t^n \to Z_t$, 可见

$$
\sum_{k=0}^\infty \partial_i^x f(Z_k^n)\Delta_k^n X^i \xrightarrow{L^2(\mathbb{P})} \int_0^T \partial_i^x f(Z_t)\mathrm{d}X_t^i.
$$

另一方面, 依照通常的积分论,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^\infty \partial_{ij}^x f(Z_k^n)\Delta_k^n\langle X^i, X^j\rangle \xrightarrow{L^1(\mathbb{P})} \int_0^T f(Z_t)\langle X^i, X^j\rangle(\mathrm{d}t), \\
&\sum_{k=0}^\infty \int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n} \partial_j^y f(X_{k+1}^n, Y_t) Y^j(\mathrm{d}t) \xrightarrow{L^1(\mathbb{P})} \int_0^T \partial_j^y f(Z_t) Y^j(\mathrm{d}t).
\end{aligned}
$$

我们只需再证 $\sum_k R_k^n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. 首先,

$$\begin{aligned}|[\partial_{ij}^x f(\hat{Z}_k^n) - \partial_{ij}^x f(Z_k^n)]\Delta_k^n X^i \Delta_k^n X^j| &\leqslant C[(\Delta_k^n X^i)^2 + (\Delta_k^n X^j)^2]|\hat{Z}_k^n - Z_k^n| \\ &\leqslant C'[(\Delta_k^n X^i)^2 + (\Delta_k^n X^j)^2]/n.\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big\{\Big|\sum_k [(\partial_{ij}^x f(\hat{Z}_k^n) - \partial_{ij}^x f(Z_k^n))\Delta_k^n X^i \Delta_k^n X^j]\Big|\Big\} \\ &\leqslant 2C'\mathbb{E}\big[|X_T - X_0|^2\big]/n \ \text{(由正交性)} \\ &\to 0.\end{aligned}$$

与此同时,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\partial_{ij}^x f(Z_k^n)\big(\Delta_k^n X^i \Delta_k^n X^j - \Delta_k^n\langle X^i, X^j\rangle\big)\Big)^2\Big] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\big[\big(\partial_{ij}^x f(Z_k^n)(\Delta_k^n X^i \Delta_k^n X^j - \Delta_k^n\langle X^i, X^j\rangle)\big)^2\big] \\ &\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\big[\big((\Delta_k^n X^i \Delta_k^n X^j - \Delta_k^n\langle X^i, X^j\rangle)\big)^2\big] \\ &\leqslant C'\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\big[\big(\Delta_k^n X^i\big)^4 + \big(\Delta_k^n X^j\big)^4 + \big(\Delta_k^n\langle X^i\rangle\big)^2 + \big(\Delta_k^n\langle X^j\rangle\big)^2\big] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Schwarz 不等式)} \\ &\leqslant C'\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\big[\big(\Delta_k^n X^i\big)^2/n^2 + \big(\Delta_k^n X^j\big)^2/n^2 + \Delta_k^n\langle X^i\rangle/n + \Delta_k^n\langle X^j\rangle/n\big] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(由 } \tau_k^n \text{ 之定义)} \\ &\leqslant C'\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\big[\big(\Delta_k^n X^i\big)^2 + \big(\Delta_k^n X^j\big)^2 + \Delta_k^n\langle X^i\rangle + \Delta_k^n\langle X^j\rangle\big]/n \\ &\leqslant C''\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\big[\big|\Delta_k^n X\big|^2\big]/n \ \text{(由鞅性、分解)} \ \Big(\big|\Delta_k^n X\big|^2 = \sum_{i=1}^{M}\big(\Delta_k^n X^i\big)^2\Big) \\ &= C''\mathbb{E}\big[|X_T - X_0|^2\big]/n \ \text{(由正交性)} \\ &\to 0, \qquad n \to \infty. \qquad \square\end{aligned}$$

§8.6 局部鞅与半鞅

至此, 我们已经对于平方可积鞅 (X_t) 研究了如下三个问题.

(1) Doob-Meyer 分解: $X_t^2 = M_t$ (鞅) $+\langle X\rangle(t)$ (局部有限变差).

(2) 对于 $\alpha \in L^2_{\ell oc}(\langle X\rangle)$, 定义了随机积分和随机微分.

(3) Itô 公式. 即变量替换公式或复合函数的微分公式: $f \in C_b^{2,1}(\mathbb{R}^M \otimes \mathbb{R}^N)$, $Z = (X, Y)$.

$$\mathrm{d}f(Z_t) = \sum_{i=1}^{M} \partial_i^x f(Z_t)\mathrm{d}X_t^i + \sum_{j=1}^{N} \partial_j^y f(Z_t) Y^j(\mathrm{d}t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} \partial_{ij}^x f(Z_t)\langle X^i, X^j\rangle(\mathrm{d}t).$$

但这里的平方可积性要求太强, 我们将它放宽.

定义 8.16. 设 (X_t) 右循、a.s. 连续. 如存在停时列 $\sigma_n \uparrow \infty$, a.s. 使得 $(X_t^{\sigma_n} := X_{t\wedge\sigma_n})_{t\geqslant 0}$ 对每固定的 $n \geqslant 1$ 是有界鞅, 则称 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为 a.s. 连续**局部鞅**. 其全体记作 $\mathscr{M}_c^{\ell oc}$.

设 $X \in \mathscr{M}_c^{\ell oc}$, 则我们依然有 Doob-Meyer 分解

$$X_t^2 = M_t \left(\in \mathscr{M}_c^{\ell oc}\right) + \langle X\rangle(t) \ \ (\text{依然局部有界变差}).$$

事实上, 由 $(X_t^{\sigma_n})^2 = M_t^{\sigma_n} + \langle X^{\sigma_n}\rangle(t)$. 我们只需取 $\langle X\rangle_t = \sup_n \langle X^{\sigma_n}\rangle(t)$ 即可. 由此导出分解的存在性. 仿照先前的证明可证分解唯一. 然后, 可定义 $\langle X, Y\rangle$. 其次, 对 $\alpha \in L^2_{\ell oc}(\langle X\rangle)$, 可定义随机积分. 最后, Itô 公式中的 $f \in C_b^{2,1}$ 可放宽为 $f \in C^{2,1}$.

让我们转到另一问题: 何种过程对 (变量替换) 运算封闭? 我们已经知道: 对每一个 $X \in \mathscr{M}_c^{\ell oc}$ 有

$$\mathrm{d}f(X_t) = f'(X_t)\mathrm{d}X_t \ (\text{局部鞅}) + \frac{1}{2}f''(X_t)\langle X\rangle(\mathrm{d}t) \ (\text{局部有界变差}).$$

右方表明必需包括两部分.

定义 8.17. 称 $Z = (Z_t)$ 为a.s. 连续**半鞅**, 如果 Z 有如下分解: $Z = X + Y$, 其中 $X \in \mathscr{M}_c^{\ell oc}$, Y 为右循、a.s. 连续、局部有界变差. 我们将 a.s. 连续的半鞅的全体记作 $\mathscr{S}_\bullet\mathscr{M}_c$.

注 8.18. 对于给定的 $Z \in \mathscr{S}_\bullet\mathscr{M}_c$, 分解 (X, Y) 是a.s. 唯一的. 因此, 可记 $\langle Z\rangle = Y$. 类似地, 对于给定的 $Z, Z' \in \mathscr{S}_\bullet\mathscr{M}_c$, 可定义 $\langle Z, Z'\rangle$. 进而, 对于给定的满足下述条件的循序可测的 α:

$$\int_0^T \alpha_t^2 \langle Z\rangle(\mathrm{d}t) \bigvee \int_0^T |\alpha_t||Y|(\mathrm{d}t) < \infty, \qquad T > 0, \text{ a.s.}$$

可定义随机积分

$$\int_0^\bullet \alpha_s \mathrm{d}Z_s = \int_0^\bullet \alpha_s \mathrm{d}X_s + \int_0^\bullet \alpha_s \mathrm{d}Y_s.$$

此时, Itô 公式成为:

$$f(Z_t)-f(Z_0)=\sum_{i=1}^N\int_0^t \partial_i^x f(Z_s)\mathrm{d}Z_s^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N\int_0^t \partial_{ij}^x f(Z_s)\langle Z^i,Z^j\rangle(\mathrm{d}s),\ \text{a.s.}$$

$$Z\in(\mathscr{S}_\bullet\mathscr{M}_c)^N,\ f\in C^2(\mathbb{R}^N).$$

§8.7 多元随机积分

设 $X=(X^1,\cdots,X^d)\in(\mathscr{M}_c^2)^d$. 记 $\langle\langle X,X\rangle\rangle=(\langle X^i,X^j\rangle:\ 1\leqslant i,j\leqslant d)$. 令

$$\begin{aligned}L_{\ell oc}^2(\langle\langle X,X\rangle\rangle)=\Big\{\theta:\ [0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}^d:\ \theta\ \text{循序可测且}\\ &\mathbb{E}\Big[\int_0^T(\theta_t,\langle\langle X,X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\theta_t)_{\mathbb{R}^d}\Big]\\ &=\mathbb{E}\Big[\int_0^T\theta_t^*\langle\langle X,X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\theta_t\Big]\\ &=\sum_{i,j=1}^d\mathbb{E}\Big[\int_0^T\theta_t^i\langle X^i,X^j\rangle(\mathrm{d}t)\theta_t^j\Big]<\infty,\ \forall T>0\Big\}.\end{aligned}$$

其中 θ_t^* 是 θ_t 的转置.

在处理多元情形时, 自然采用矩阵和向量写法. 对于不太熟悉这些记号的读者, 可自己改写成分量的形式, 习惯了也就更为自然. 例如这里的倒数第 3 行的内积, 倒数第 2 行是其矩阵 (向量) 乘积写法, 末行即是分量形式.

注意

$$\begin{aligned}|\theta_t^i\langle X^i,X^j\rangle(\mathrm{d}t)\theta_t^j|&\leqslant|\theta_t^i\theta_t^j|\langle X^i\rangle^{1/2}(\mathrm{d}t)\langle X^j\rangle^{1/2}(\mathrm{d}t)\\ &\leqslant\frac{1}{2}|\theta_t^i\theta_t^j|\big(\langle X^i\rangle(\mathrm{d}t)+\langle X^j\rangle(\mathrm{d}t)\big).\end{aligned}$$

因而 $\langle\langle X,X\rangle\rangle$ 非负定. 进而 $\int_0^T\theta_t^*\langle\langle X,X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\theta_t\geqslant 0$, a.s. 对于 $\theta,\theta'\in L_{\ell oc}^2(\langle\langle X,X\rangle\rangle)$,

$$\langle\theta,\theta'\rangle\equiv\mathbb{E}\Big[\int_0^T\theta_t^*\langle\langle X,X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\theta_t\Big]$$

成为 $L_{\ell oc}^2(\langle\langle X,X\rangle\rangle)$ 上的内积 (局部, 即固定 T).

注 8.19. 局部地, $\big(L_{\ell oc}^2(\mathrm{Tr}\langle\langle X,X\rangle\rangle)\big)^d$ 可视为 $L_{\ell oc}^2(\langle\langle X,X\rangle\rangle)$ 的稠子空间. 事实上, 任给 $\theta\in L_{\ell oc}^2(\langle\langle X,X\rangle\rangle)$, 命 $\theta_t(n)=I_{[0,n]}(|\theta_t|)\theta_t$, 则对一切 i,

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T\theta_t^i(n)^2\mathrm{Tr}\langle\langle X,X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\Big]\leqslant n^2\sum_{i=1}^d\mathbb{E}\big[\langle X^i\rangle(T)\big]<\infty.$$

从而 $\theta(n) \in \left(L^2_{\ell oc}(\mathrm{Tr}\langle\langle X, X\rangle\rangle)\right)^d$. 此外,

$$\begin{aligned}\|\theta - \theta(n)\| &:= \langle \theta - \theta(n), \theta - \theta(n)\rangle \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T (\theta - \theta(n))_t^* \langle\langle X, X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)(\theta - \theta(n))_t\right] \\ &\to 0, \qquad n \to \infty \text{ (逐点收敛加控制收敛定理)}.\end{aligned}$$

对于 $\theta \in \left(L^2_{\ell oc}(\mathrm{Tr}\langle\langle X, X\rangle\rangle)\right)^d$, 定义

$$\int_0^T \theta_t \mathrm{d}X_t = \int_0^T \langle \theta_t, \mathrm{d}X_t\rangle = \sum_{i=1}^d \int_0^T \theta_t^i \mathrm{d}X_t^i.$$

然后通过逼近手续, 可定义出关于 $\theta \in L^2_{\ell oc}(\langle\langle X, X\rangle\rangle)$ 的随机积分.

引理 8.20. 设 $\theta \in L^2_{\ell oc}(\langle\langle X, X\rangle\rangle)$, $\eta \in L^2_{\ell oc}(\langle\langle Y, Y\rangle\rangle)$, 此处

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = (\langle X^i, Y^j\rangle : 1 \leqslant i, j \leqslant d),$$

则 $\langle \theta_\bullet X, \eta_\bullet Y\rangle(\mathrm{d}t) = \theta_t^* \langle\langle X, Y\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\eta_t$.

证明 当 $\theta \in \left(L^2_{\ell oc}(\mathrm{Tr}\langle\langle X, X\rangle\rangle)\right)^d$, $\eta \in \left(L^2_{\ell oc}(\mathrm{Tr}\langle\langle Y, Y\rangle\rangle)\right)$ 时,

$$\begin{aligned}\langle \theta_\bullet X, \eta_\bullet Y\rangle &= \sum_{i,j=1}^d \left\langle \int_0^\bullet \theta^i \mathrm{d}X^i, \int_0^\bullet \eta^j \mathrm{d}Y^j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^d \theta^i \left\langle X^i, \int_0^\bullet \eta^j \mathrm{d}Y^j\right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^d \theta^i \eta^j \langle X^i, Y^j\rangle = \theta^* \langle\langle X, Y\rangle\rangle \eta. \qquad \square\end{aligned}$$

一般情形可用极限过渡.

命题 8.21. 给定 $\theta \in L^2_{\ell oc}(\langle\langle X, X\rangle\rangle)$, 则 $\theta_\bullet X$ 是唯一的 $I \in \mathscr{M}_c^2$ 使得

$$\left\langle I, \int_0^\bullet \eta \mathrm{d}X\right\rangle(\mathrm{d}t) = \theta_t^* \langle\langle X, X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\eta_t, \qquad \forall \eta \in L^2_{\ell oc}(\langle\langle X, X\rangle\rangle).$$

证明 由引理 8.20 知 $I = \int_0^\bullet \theta \mathrm{d}X$ 满足上式. 唯一性的证明要困难得多. 需证每一个 $I \in \mathscr{M}_c^2$ 有如下表现

$$I = \sum_j \int_0^\bullet \gamma_j(t) \mathrm{d}X_t^j.$$

见 Iketa-Watanabe [35].

其次, 假设 $\sigma: [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^d$ 循序可测且

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{Tr}\big(\sigma_t \langle\langle X, X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\sigma_t^*\big)\right] < \infty,$$

则定义 $\sigma_\bullet X = \int_0^\bullet \sigma_t \mathrm{d}X(t) \in \left(\mathscr{M}_c^2\right)^N$ 为

$$\left(\theta, \int_0^\bullet \sigma \mathrm{d}X\right)_{\mathbb{R}^N} = \int_0^\bullet \sigma^* \theta \mathrm{d}X, \qquad \text{a.s.}, \ \forall \theta \in \mathbb{R}^N.$$

这样,在 $\mathbb{R}^N$ 的标准正交基 $\{e_i\}$ 下, $\sigma_\bullet X$ 可表成

$$\sum_{i=1}^N \left(\int_0^\bullet \sigma^* e_i \mathrm{d}X\right) e_i. \qquad \square$$

§8.8 随机微分方程 (高维情形)

设 $\sigma:\ [0,\infty)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^d$, $b:\ [0,\infty)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, (B_t) 为 BM^d. 我们考虑如下随机积分方程:

$$Z_T^x = x + \int_0^T \sigma\left(t, Z_t^x\right)\mathrm{d}B_t + \int_0^T b\left(t, Z_t^x\right)\mathrm{d}t, \qquad T \geqslant 0.$$

形式上, $Z^x:\ [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}^N$ 可写成如下形式的随机微分方程:

$$\mathrm{d}Z_t^x = \sigma\left(t, Z_t^x\right)\mathrm{d}B_t + b\left(t, Z_t^x\right)\mathrm{d}t, \qquad Z_0^x = x.$$

定理 8.22. 假定对每 $T > 0$, 存在 $C(T) < \infty$ 使得

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|\sigma(t,0)\|_{\text{H.S.}} \vee |b(t,0)| \leqslant C(T),\\
&\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|\sigma(t,y') - \sigma(t,y)\|_{\text{H.S.}} \vee |b(t,y') - b(t,y)| \leqslant C(T)|y' - y|, y, y' \in \mathbb{R}^N
\end{aligned} \tag{8.1}$$

(矩阵 A 的 H.S. 范数定义为 $\|A\|_{\text{H.S.}}^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$), 则上述方程的解存在唯一.

证明 先证解的存在性. 使用迭代法. 无妨设 $s = 0$, $x = 0$. 命 $Z^{(0)} \equiv 0$,

$$Z_T^{(n)} = \int_0^T \sigma\left(t, Z_t^{(n-1)}\right)\mathrm{d}B_t + \int_0^T b\left(t, Z_t^{(n-1)}\right)\mathrm{d}t.$$

再命

$$\Delta_n(T) = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left|Z_t^{(n)} - Z_t^{(n-1)}\right|, \qquad T \geqslant 0.$$

先考虑 $n = 1$ 时 $\Delta_n(T)$ 的估计. 以 e_i 为表 $\mathbb{R}^N$ 中的标准正交基, 简记 $\sigma = \sigma(\bullet, 0)$,

则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \sigma \mathrm{d}B\right|^2\right] &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \sigma^* e_i \mathrm{d}B_t\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^d \int_0^T (\sigma^* e_i)_j \mathrm{d}B_t^j\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[\sum_{j,k} \int_0^T (\sigma^* e_i)_j \mathrm{d}B_t^j \int_0^T (\sigma^* e_i)_k \mathrm{d}B_t^k\right] \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^d \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (\sigma^* e_i)_j \mathrm{d}B_t^j\right)^2\right] \text{(由 BM 的独立增量性)} \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^d \left[\int_0^T (\sigma^* e_i)_j^2 \mathrm{d}t\right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^d \left[\int_0^T \sigma_{ij}^2 \mathrm{d}t\right] \\
&= \left[\int_0^T \|\sigma\|_{\mathrm{H.S.}}^2 \mathrm{d}t\right].
\end{aligned}$$

留意若把 $\int_0^t \sigma(u,c)\mathrm{d}B_u$ 写成 $(Y^1,\cdots,Y^N)$, $Y^j \in \mathscr{M}_c^2$, 则 $|\int_0^t \sigma \mathrm{d}B|^2 = \sum_{j=1}^N (Y^j)^2$. 这依然是下鞅. 从而可直接应用 Doob 不等式. 于是得出

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta_1(T)^2] &\leqslant 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t \sigma(u,0)\mathrm{d}B_u\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t |b(u,0)|\mathrm{d}u\right|^2\right] \\
&\leqslant 8\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \sigma(u,0)\mathrm{d}B_u\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[T\int_0^T |b(u,0)|^2 \mathrm{d}u\right] \\
&\leqslant 8\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\sigma(t,0)\|_{\mathrm{H.S.}}^2 \mathrm{d}t\right] + 2T^2 C(T)^2 \\
&\leqslant (8+2T)C(T)^2 T.
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta_{n+1}(T)^2] &\leqslant 8\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\sigma\big(t, Z_t^{(n)}\big) - \sigma\big(t, Z_t^{(n-1)}\big)\right\|_{\mathrm{H.S.}}^2 \mathrm{d}t\right] \\
&\quad + 2T\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|b\big(t, Z_t^{(n)}\big) - b\big(t, Z_t^{(n-1)}\big)\right|^2 \mathrm{d}t\right] \\
&\leqslant (8+2T)C(T)^2\, \mathbb{E}\int_0^T \left|Z_t^{(n)} - Z_t^{(n-1)}\right|^2 \mathrm{d}t \\
&\leqslant (8+2T)C(T)^2 \int_0^T \mathbb{E}[\Delta_n(t)^2]\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

于是, 由归纳法得

$$\mathbb{E}[\Delta_n(T)^2] \leqslant K(T)^n/n!,$$

此处 $K(T) = (8+2T)C(T)^2$. 因而

$$\begin{aligned}&\sup_{n\geqslant m}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Z_t^{(n)} - Z_t^{(m)}|^2\Big]\\ &\leqslant \sup_{n\geqslant m}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{\ell=m+1}^{n-1}\Delta_\ell(T)\Big)^2\Big] \leqslant \sum_{k,\ell=m+1}^{\infty}\mathbb{E}[\Delta_k(T)\Delta_\ell(T)]\\ &\leqslant \sum_{k,\ell=m+1}^{\infty}(\mathbb{E}[\Delta_k(T)^2\cdot\mathbb{E}[\Delta_\ell(T)^2])^{1/2}\\ &\leqslant \Big[\sum_{k=m+1}^{\infty}\Big(\frac{K(T)^k}{k!}\Big)^{1/2}\Big]^2 \quad \Big(\text{由 } \sum_k a_k b_k \leqslant \sum_k a_k \sum_k b_k\Big)\\ &\to 0, \qquad m\to\infty.\end{aligned}$$

故存在右循、a.s. 连续的 Z, 使得对一切 $T>0$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Z_t - Z_t^{(n)}|^2\Big] \to 0, \qquad n\to\infty.$$

今设方程有两个解 Z_t 和 Z_t', 分别对应于初值 x 和 x'. 则前面的证明给出 $\Delta(T) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|Z_t - Z_t'|$ 满足 (由 $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$)

$$\mathbb{E}[\Delta(T)^2] \leqslant 3|x-x'|^2 + (12+3T)TC(T)^2\int_0^T \mathbb{E}[\Delta(t)^2]\mathrm{d}t.$$

于是, 由 Gronwall 引理得出

$$\mathbb{E}[\Delta(T)^2] \leqslant 3|x-x'|^2\exp\big[(12+3T)TC(T)^2\big].$$

特别地, 当 $x=x'$ 时导出唯一性. □

注 8.23. 文献 [18] 中, 将条件 (8.1) 放宽为如下的非 Lipschitz 条件下得到过程的存在唯一性: 对任意的 $|y'-y|<1$ 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\sigma(t,0)\|_{\mathrm{H.S.}} \vee |b(t,0)| \leqslant C(T),$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\sigma(t,y') - \sigma(t,y)\|_{\mathrm{H.S.}}^2 \leqslant C(T)|y'-y|^2 r(|y'-y|^2),$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|b(t,y') - b(t,y)| \leqslant C(T)|y'-y| r(|y'-y|^2),$$

其中 $r \in C^1((0,1),\mathbb{R}_+)$ 满足

$$\lim_{s\to 0}\frac{sr'(s)}{r(s)}=0,\ \int_0^a \frac{\mathrm{d}s}{sr(s)}=\infty,\ a>0.$$

今设 $\sigma(t,x)=\sigma(x)$, $b(t,x)=b(x)$ 与 t 无关. 考虑方程

$$X_T-X_0+\int_0^T \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t+\int_0^T b(X_t)\mathrm{d}t,$$

其中 (B_t) 为 BM^d. 命

$$\overline{X}_T=X_T-\int_0^T b(X_t)\mathrm{d}t\in\mathscr{M}_c^2.$$

则

$$\langle\langle\overline{X},\overline{X}\rangle\rangle=\left\langle\!\!\left\langle\int_0^\bullet \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t,\int_0^\bullet \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t\right\rangle\!\!\right\rangle=\sigma\sigma^*(X_t)=:a(X_t).$$

将 Itô 公式应用于

$$F(\overline{X}_T,Y_T)=f(\overline{X}_T+Y_T),\qquad Y_T=\int_0^T b(X_t)\mathrm{d}t,\ \ f\in C_b^2(\mathbb{R}^N)$$

得出

$$f(X_T)-f(X_0)-\int_0^T Lf(X_t)\mathrm{d}t=\int_0^T \nabla f(X_t)\mathrm{d}\overline{X}_t\in\mathscr{M}_c^2,$$

此处

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{ij}^x+\sum_{i=1}^N b_i(x)\partial_i^x.$$

故对每 $f\in C_b^2(\mathbb{R}^N)$, $\left(f(X_t)-\int_0^t Lf(X_u)\mathrm{d}u,\mathscr{F}_t,\mathbb{P}\right)$ 是鞅. 这建立了扩散过程 (X_t) 与二阶微分算子 L 之间的联系. 我们将在下一节回到这一论题.

§8.9 Feynman-Kac 公式等三个数学工具

Feynman-Kac 公式, 随机时间变换与 Girsanov 定理这三种数学工具, 乃是随机分析的三大"法宝", 有极其广泛的应用. 这里, 我们限于较基础的部分, 以说明主要想法. 更完备的结果, 可参考 [27, 47]. 在本节的最后一部分, 我们将应用于凸几何, 给出著名的 Brunn-Minkowski 不等式的概率证明. 这提供了概率论应用于几何、分析的一个范例.

在上节末尾, 我们使用随机微分方程, 构造了相应于算子

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{ij}^x+\sum_{i=1}^N b_i(x)\partial_i^x$$

的扩散过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$, 其中 $a(x)=(\sigma\sigma^*)(x)$. 下述结果给出了抛物型方程解的随机表示.

定理 8.24 (Feynman-Kac 公式). 设 $V\in {}_b\mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$, $\phi\in C_b(\mathbb{R}^N)$. 假定 $f\in C_b^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$ 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial t}=Lf+Vf,\\ f(0,\cdot)=\phi,\end{cases}$$

则

$$f(t,x)=\mathbb{E}_x\left\{\phi(X_t)\exp\left[\int_0^t V(X_s)\mathrm{d}s\right]\right\},\ t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^N.$$

证明 固定 $t_0>0$. 应用 Itô 公式于函数 $(t,z_1,z_2)\to f(t_0-t,z_1)e^{z_2}(t\leqslant t_0,z_1,z_2\in\mathbb{R}^N)$ 得

$$\begin{aligned}&f(t_0-t,X_t)\exp\left[\int_0^t V(X_s)\mathrm{d}s\right]-f(t_0,x)\\&=\int_0^t\langle\nabla^x f,\mathrm{d}\bar{X}_s\rangle e^{\int_0^s V(X_u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+\int_0^t f(t_0-s,X_s)e^{\int_0^s V(X_u)\mathrm{d}u}V(X_s)\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^t\left(-\frac{\partial}{\partial s}f+Lf\right)(s,X_s)e^{\int_0^s V(X_u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\\&=\int_0^t\langle\nabla^x f,\mathrm{d}\bar{X}_s\rangle e^{\int_0^s V(X_u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\in\mathscr{M}_c^2,\end{aligned}\tag{8.2}$$

其中 $(\bar{X}_t)$ 已在上节定义过:

$$\overline{X}_t=X_t-\int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s\in\mathscr{M}_c^2.$$

(8.2) 式两边取期望, 得

$$f(t_0,x)=\mathbb{E}_x\left\{f(t_0-t,X_t)\exp\left[\int_0^t V(X_s)\mathrm{d}s\right]\right\}.$$

命 $t\uparrow t_0$, 由初值条件 $f(0,\cdot)=\phi$ 立得所欲证者. □

一个简单得多的情形是 Dirichlet 边值问题. 设 D 为 $\mathbb{R}^N$ 的一个有界开集. 命

$$\tau=\tau_D=\inf\{t\geqslant 0: B_t\notin D\}.$$

定理 8.25. 设 $\phi\in {}_b\mathscr{B}(\partial D)$, $f\in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ 满足方程

$$\begin{cases}\Delta f=0, & \text{在 } D \text{ 内},\\ f|_{\partial D}=\phi.\end{cases}$$

则 f 可表成

$$f(x)=\int_{\partial D}\phi(y)\mathbb{P}_x^{B(\tau)}(\mathrm{d}y),$$

其中 $\mathbb{P}_x^{B(\tau)}$ 是从 x 出发的 BM^N、首出区域 D 在边界 ∂D 上的分布.

证明　由于

$$f(B_t)-\frac{1}{2}\int_0^t\Delta f(B_s)\mathrm{d}s$$

是鞅, 由 Doob 停止定理,

$$f(B_\tau)-\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau}\Delta f(B_s)\mathrm{d}s$$

亦然. 这样

$$f(x)=\mathbb{E}_x[f(B_\tau)]=\mathbb{E}_x[\phi(B_\tau)]=\int_{\partial D}\phi(y)\mathbb{P}_x^{B(\tau)}(\mathrm{d}y).\qquad\square$$

上述两个结果给出了扩散过程与偏微分方程之间的联系. 其实, 两者都是物理系统的刻画, 前者是微观刻画,后者是宏观 (平均) 刻画. 当然, 微观刻画要精细得多、也困难得多. 微观刻画的一个明显优点是: 例如上述结果中允许区域 D 的边界 ∂D 非规则, 即允许非常粗糙的边界 (例如分形集), 此外, 系数 a,b,V 等的条件可进一步减弱, 其光滑性要求弱于通常的分析条件. 这说明为何概率论会成为分析学的一种重要研究工具.

现在, 我们转入本节的第二个论题——**随机时间变换**. 其实, 前面在定义随机积分时已使用过这种技巧 (本章第四节的末段). 此处再提供一个例子.

我们知道, 对于给定的非线性光滑实函数 f, 过程 $(f(B_t))_{t\geqslant0}$ 不再是 BM. 下述结果相当奇妙, 它表明复空间比实空间有强得多的 "刚性".

我们称 $B_t=B_t^1+\sqrt{-1}B_t^2$ 为 (标准) 复 BM, 如果 (B_t^1) 和 (B_t^2) 是相互独立的 BM. 回忆复函数 $f=u+\sqrt{-1}v$ 称为解析函数, 如果它可展开成绝对收敛的幂级数. 等价地, f 的实部 u 和虚部 v 满足下述的 Cauchy-Riemann 条件:

$$u_x=v_y,\ u_y=-v_x.$$

命题 8.26. 设 $(B_t)_{t\geqslant0}$ 为标准复BM, f 为解析函数. 定义 σ_t 为方程

$$\int_0^{\sigma_t}|f'(B_s)|^2\mathrm{d}s=t,\ t>0$$

的唯一解, 则 $(f(B_{\sigma_t}))_{t\geqslant0}$ 也是标准复 BM.

证明 因为 f 的实部 u 和虚部 v 皆为调和函数: $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$, 由 Itô 公式得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(B_t) &= u_x(B_t)\mathrm{d}B_t^1 + u_y(B_t)\mathrm{d}B_t^2, \\ \mathrm{d}v(B_t) &= v_x(B_t)\mathrm{d}B_t^1 + v_y(B_t)\mathrm{d}B_t^2, \\ &= -u_y(B_t)\mathrm{d}B_t^1 + u_x(B_t)\mathrm{d}B_t^2. \end{aligned}$$

这样,

$$\langle u(B)\rangle_t = \langle v(B)\rangle_t = \int_0^t (u_x^2 + u_y^2)(B_s)\mathrm{d}s = \int_0^t |f'(B_s)|^2\mathrm{d}s,$$

$$\langle u(B), v(B)\rangle = 0,$$

得出所需断言. □

更一般地,如 $\phi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ 满足

$$0 < c_1 \leqslant \phi \leqslant c_2 < \infty,$$

则可定义**随机时间变换** τ_ϕ: 它是方程

$$\int_0^{\tau_\phi(t)} \frac{\mathrm{d}s}{\phi(X_s)} = t, \ t > 0$$

的唯一解. 当系数 a 一致正定、有界, $b = 0$ 时, 扩散过程 (X_t) 可经随机变换 $\tau_\phi : \phi = a^{-1}$ 化为布朗运动. 详见参考文献 [57, §6.5].

对于一般的扩散过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$, 其算子 L 的一阶项的系数 b 若非零, 可通过一种测度变换将它变成零. 这是本节所要讨论的第三个主题——**Girsanov变换**. 此处只处理一种特殊情形.

设 $T \leqslant \infty$, 令

$$\Omega_T = \{\omega : \omega_0 = 0,\ \omega_t \text{ 在 } [0,T] \text{ 上连续}\},\ \mathscr{F}_t^0 = \sigma(\omega_s : s \leqslant t).$$

因为轨道 a.s. 连续, 可将标准 BM^N 视为定义在 $(\Omega_T, (\mathscr{F}_t^0)_{t\in[0,T]})$ 上具有 Wiener 测度 $\mathbb{P}$ 的随机过程 $(B_t = \omega_t)_{t\in[0,T]}$. 限于 $T < \infty$ 的好处是 Ω_T 依一致范数构成 Banach 空间.

以下固定 $T < \infty$. 给定关于 $(\mathscr{F}_t^0)_{t\in[0,T]}$ 适应的、取值于 $\mathbb{R}^N$ 的随机过程 $(u_t)_{t\in[0,T]}$, 满足 $\int_0^T |u_t|^2\mathrm{d}t < \infty$, a.s. 及 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} Z_T = 1$, 此处

$$Z_t = \exp\left[-\int_0^t u_s\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t |u_s|^2\mathrm{d}s\right],\ t \in [0,T].$$

在 $\mathscr{F}_T$ 上,可定义如下测度变换 (**Girsanov变换**)

$$\mathrm{d}\mathbb{Q} = Z_T\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

命

$$\widetilde{B}_t = B_t + \int_0^t u_s \mathrm{d}s,\ t \in [0,T].$$

定理 8.27 (Girsanov 定理). $(\widetilde{B}_t)_{t\in[0,T]}$ 是定义在 $(\Omega_T, \mathscr{F}_T^0, \mathbb{Q})$ 上的 BM^N. 换言之, 在 $\mathbb{Q}$ 之下, $(\widetilde{B}_t)$ 在 T 之前的任何有限维分布重合于 (B_t) 在 $\mathbb{P}$(Wiener 测度) 之下的相应的有限维分布.

证明 此处只证 $N=1$ 情形, 高维情形留作习题. 命

$$\tau_k = \inf\left\{t : \int_0^t u_s^2 \mathrm{d}s \geqslant k\right\}.$$

则由 Itô 公式易知 $(Z_{t\wedge\tau_k})_{t\in[0,T]}$ 是正的连续鞅. 因此 $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ 是连续局部鞅.由 $\mathbb{E}Z_T = 1$ 知它实质上是鞅.

为证明有限维分布性质, 由于布朗运动的增量独立、正态, 只需对于形如

$$F(x_\bullet) = \exp\left[\sqrt{-1}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j(x_{t_{j+1}} - x_{t_j})\right],\ \lambda_j \in \mathbb{R},\ 0 = t_0 < \cdots < t_m = T$$

的函数 F 证明 $\mathbb{E}_\mathbb{P}[F(\widetilde{B})Z_T] = \mathbb{E}_\mathbb{P}F(B)$. 为此, 先证明对于每一对 $s < t\,(\leqslant T)$ 和 $h \in \mathscr{F}_s^0$,

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}[\exp[\sqrt{-1}\,\lambda(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s)]hZ_T] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[hZ_T]\exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right].$$

这可以由 Itô 公式导出:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\mathbb{P}\left\{e^{\sqrt{-1}\,\lambda\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}hZ_T\right\}\\
&= \mathbb{E}_\mathbb{P}\left\{\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[e^{\sqrt{-1}\,\lambda\left(B_t - B_s + \int_s^t u_r \mathrm{d}r\right) - \int_s^t u_r \mathrm{d}B_r - \frac{1}{2}\int_s^t u_r^2 \mathrm{d}r}\Big|\mathscr{F}_s^0\right]hZ_T\right\}\\
&= \mathbb{E}_\mathbb{P}[hZ_T] - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[e^{\sqrt{-1}\,\lambda\left(B_\sigma - B_s + \int_s^\sigma u_r \mathrm{d}r\right)}hZ_T\right]\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

将左边视为 t 的函数, 它重合于右边第二项的被积函数. 这是一个简单的积分方程, 其解正是我们所求的.

对于一般的 F, 将上述结果应用于

$$h = \exp\left[-\sqrt{-1}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j\left(\widetilde{B}_{t_{j+1}} - \widetilde{B}_{t_j}\right)\right]$$

得出

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{\exp\left[-\sqrt{-1}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j(\widetilde{B}_{t_{j+1}}-\widetilde{B}_{t_j})\right]Z_T\right\}\\
&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{e^{-\sqrt{-1}\lambda_{m-1}(\widetilde{B}_{t_m}-\widetilde{B}_{t_{m-1}})}hZ_T\right\}\\
&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[hZ_t]\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda_m^2(t_{m+1}-t_m)\right].
\end{aligned}$$

递推下去, 最后得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[F(\widetilde{B})Z_T]&=\mathbb{E}(Z_T)\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j^2(t_{j+1}-t_j)\right]\\
&=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j^2(t_{j+1}-t_j)\right]\\
&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}F(B). \qquad \square
\end{aligned}$$

现在, 我们使用上述结果, 给出一种简单扩散方程解的变分刻画, 同时也为研究下一个论题作准备. 设 σ 为正常数, $c, f\in C_b(\mathbb{R}^n)$, $\inf\limits_x f>0$. 考虑 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\sigma^2}{2}\Delta v-\dfrac{1}{\sigma^2}c(x)v,\ t>0, x\in\mathbb{R}^n,\\ v(0,x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

经变换 $V=-\sigma^2\log v$, $F=-\sigma^2\log f$, 化成 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2}|\nabla V|^2-c(x)=\dfrac{\sigma^2}{2}\Delta V,\ t>0, x\in\mathbb{R}^n,\\ V(0,x)=F(x),\ x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

命 $B_t^{x,\sigma}=x+\sigma B_t$, $t\geqslant 0$, 则 Feynman-Kac 公式给出

$$v(t,x)=v_{\sigma,c}^F(t,x)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{\exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}F(B_t^{x,\sigma})+\int_0^t c(B_t^{x,\sigma})\mathrm{d}s\right]\right\},$$

此处 $\mathbb{P}$ 为 Wiener 测度.

下述结果进一步给出了 $v_{\sigma,c}^F$ 的一种变分公式.

命题 8.28. 以 $\mathscr{U}(T)$ 表示所有有界、循序可测过程 $(u_t)_{t\in[0,T]}$ 的全体. 假设 $c, F\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. 对于每 $u\in\mathscr{U}(T)$, 命

$$h(t)=h_u(t)=\int_0^t u_s\mathrm{d}s,\ t\in[0,T],$$

$$J_{\sigma,c}^F(t,x,u)=\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[F(B_t^{x,\sigma}+h_u(t))+\int_0^t\left(c(B_s^{x,\sigma}+h_u(s))+\frac{1}{2}|u_s|^2\right)\mathrm{d}s\right].$$

则

$$v_{\sigma,c}^F(T,x) = \exp\left[-\inf_{u\in\mathscr{U}(T)} J_{\sigma,c}^F(T,x,u)\right],\ T>0,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

证明 记

$$X_t = X_t^u = B_t^{x,\sigma} + h_u(t),\ t\in[0,T],$$

$$Y_t^u = F(X_t) + \int_0^t \left(c(X_s) + \frac{1}{2}|u_s|^2\right)\mathrm{d}s + \sigma\int_0^t u_s\mathrm{d}B_s,\ t\in[0,T].$$

对于 $\mathrm{d}\mathbb{Q} = Z_T\mathrm{d}\mathbb{P}$,

$$Z_T = \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T |u_s|^2\mathrm{d}s - \frac{1}{\sigma}\int_0^t u_s\mathrm{d}B_s\right]$$

和非负 $\mathscr{F}_T^0$ 可测函数 ϕ, 由 Girsanov 定理, 我们有

$$\int_{\Omega_T}\phi\left(\omega+\frac{h}{\sigma}\right)\mathbb{Q}(\mathrm{d}\omega) = \int_{\Omega_T}\phi(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

留意 $B_t^{x,\sigma}$ 经变换 $B_t=\omega_t\to\omega_t+h(t)/\sigma$ 成为 $x+\sigma(B_t+h(t)/\sigma) = B_t^{x,\sigma}+h(t) = X_t$, 得出

$$\begin{aligned} v(T,x) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left\{F(B_T^{x,\sigma}) + \int_0^T c(B_t^{x,\sigma})\mathrm{d}t\right\}\right] \quad \text{(Feynman-Kac 公式)} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left\{F(X_T) + \int_0^T c(X_t)\mathrm{d}t\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}Y_T^u\right]. \quad \text{(由 } \mathbb{Q} \text{ 的定义)} \end{aligned}$$

这样, 由 Jensen 不等式得出

$$\log v(T,x) \geqslant -\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}Y_T^u.$$

对于固定的 u, 若 Y_u 几乎处处为常数, 则此不等式成为等式. 换言之, 我们通过选择 Girsanov 定理中的函数 η, 使得 Y^η 几乎处处为常数, 以此来优化 $v(T,x)$. 为此, 命

$$U(t,x) = -\nabla V(T-t,x),\ t\in[0,T].$$

则 c 和 F 的有界光滑性将保证 $U(t,\cdot)$ 的 Lipschitz 性. 因此, 方程

$$\mathrm{d}X_t = U(t,X_t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B_t,\ t\in[0,T],\ X_0 = x$$

有唯一解. 取 $\eta_t = U(t,X_t),\ t\in[0,T]$. 那么

$$X_t = X_t^\eta = x + B_t + h_\eta(t) = B_t^{x,\sigma} + h_\eta(t),$$

与前面所用的记号 X_t 一致.

考虑过程

$$\xi_t = V(T-t, X_t) + \int_0^t \left(c(X_s) + \frac{1}{2}|\eta_s|^2\right) \mathrm{d}s + \sigma \int_0^t \eta_s \mathrm{d}B_s.$$

则由 Itô 公式得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\xi_t &= -\frac{\partial}{\partial t}V(T-t, X_t)\mathrm{d}t + \nabla V(T-t, X_t)\cdot(\eta_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2}\Delta V(T-t, X_t)\mathrm{d}t + \left(c(X_t) + \frac{1}{2}|\eta_t|^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\eta_t \mathrm{d}B_t \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}V(T-t, X_t)\mathrm{d}t - \eta_t\cdot(\eta_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2}\Delta V(T-t, X_t)\mathrm{d}t + \left(c(X(t)) + \frac{1}{2}|\eta_t|^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\eta_t \mathrm{d}B_t \\
&= \left[-\frac{\partial}{\partial t}V(T-t, X_t) - \frac{1}{2}|\nabla V(T-t, X_t)|^2 + \frac{\sigma^2}{2}\Delta V(T-t, X_t) + c(X_t)\right]\mathrm{d}t \\
&= 0, \quad \text{a.s. } t \leqslant T.
\end{aligned}$$

最后一步是因为 $V(T,x)$ 满足 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程. 这样, $\xi_T = Y_T^\eta$ 几乎处处为常数. 由此并注意 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\int_0^t u_s \mathrm{d}B_s = 0$ 得出所需断言. □

现在转入本节最后一个论题, 即凸几何的一个重要不等式. 以下设 $\theta = (\theta_0, \theta_1) \subset \mathbb{R}^2$ 为一正向量. 对于 $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, 令 $x_\theta = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1$. 对于给定的 $\mathbb{R}^n$ 的子集 A_0 和 A_1, 记 $A_\theta = \{x_\theta : x_0 \in A_0, x_1 \in A_1\}$, 也写成 $A_\theta = \theta_0 A_0 + \theta_1 A_1$. 以 $V_n(A)$ 表 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ 的体积 (Lebesgue 测度). 则著名的 **Brunn-Minkowski 不等式**为

$$V_n(A_\theta) \geqslant V_n(A_0)^{\theta_0} V_n(A_1)^{\theta_1}, \quad \theta_0 + \theta_1 = 1,\ A_0, A_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n). \tag{8.3}$$

此不等式有若干等价形式

$$V_n(A_\theta)^{1/n} \geqslant \theta_0 V_n(A_0)^{1/n} + \theta_1 V_n(A_1)^{1/n}, \tag{8.4}$$

$$V_n(A_\theta)^{1/n} \geqslant \min\{V_n(A_0), V_n(A_1)\}, \quad \theta_0 + \theta_1 = 1,\ A_0, A_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n).$$

这些等价性的证明都不难. 例如说, 使用算术平均–几何平均不等式, 可由 (8.4) 导出 (8.3). 反之, 在 (8.3) 中取 $A_0 = V_n(A_0')^{-1/n} A_0'$ 和 $A_1 = V_n(A_1')^{-1/n} A_1'$, 则其右方等于 1. 再取

$$\theta_0 = \frac{V_n(A_0')^{1/n}}{V_n(A_0')^{1/n} + V_n(A_1')^{1/n}}.$$

那么 (8.3) 的左方成为

$$V_n\left(\frac{A_0' + A_1'}{V_n(A_0')^{1/n} + V_n(A_1')^{1/n}}\right) = \frac{V_n(A_0' + A_1')}{(V_n(A_0')^{1/n} + V_n(A_1')^{1/n})^n}.$$

这就得出

$$V_n(A_0'+A_1')^{1/n} \geqslant V_n(A_0')^{1/n} + V_n(A_1')^{1/n}.$$

最后取 $A_0' = \theta_0 A_0$ 和 $A_1' = \theta_1 A_1$, 便回到 (8.4). 关于此不等式研究的丰富内容和诸多新进展, 详见参考文献 [22]. 此不等式之所以成为凸几何的基本结果, 是因为最早发现此不等式时, 假定 A_0 和 A_1 均为凸集, 那么 A_θ 是 A_0 和 A_1 的凸组合.

下面, 我们需要用到一种函数不等式. 设 $D_i (i=0,1)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子集, $\sigma_0, \sigma_1 > 0$. 命 $\sigma_\theta = \theta_0\sigma_0 + \theta_1\sigma_1$. 我们考虑函数 $\phi_j : D_j \to \mathbb{R} (j=0,1,\theta)$ 满足如下关系

$$\frac{1}{\sigma_\theta}\phi_\theta(x_\theta) \leqslant \frac{\theta_0}{\sigma_0}\phi_0(x_0) + \frac{\theta_1}{\sigma_1}\phi_1(x_1),\ x_0 \in D_0,\ x_1 \in D_1. \tag{8.5}$$

下面是这类函数的三个例子.

(1) $\sigma_0 = \sigma_1$, $\theta_0 + \theta_1 = 1$,

$$\phi_\theta(x_\theta) \leqslant \theta_0\phi_0(x_0) + \theta_1\phi_1(x_1),\ x_0 \in D_0,\ x_1 \in D_1.$$

(2) $\phi_j = \psi_j^2$, $\psi_j \geqslant 0$, $j = 0, 1, \theta$ 且

$$\psi_\theta(x_\theta) \leqslant \theta_0\psi_0(x_0) + \theta_1\psi_1(x_1),\ x_0 \in D_0,\ x_1 \in D_1.$$

(3) $\phi_j = \sigma_j^4/\psi_j^2$, $j = 0, 1, \theta$, ψ_j 满足

$$\psi_\theta(x_\theta) \geqslant \theta_0\psi_0(x_0) + \theta_1\psi_1(x_1),\ x_0 \in D_0,\ x_1 \in D_1.$$

为验证后两种情形, 可考虑函数

$$\gamma_\alpha(\lambda, \sigma) = \lambda^{\alpha+1}/\sigma^\alpha,\ \lambda \geqslant 0,\ \sigma > 0.$$

它是一阶正齐次的: $\gamma_\alpha(c\lambda, c\sigma) = c\gamma_\alpha(\lambda, \sigma)$, $\forall\, c > 0$. 当 $\alpha = 1$ 时, 它是凸的,

$$\mathrm{Hess}(\gamma_\alpha) = \alpha(\alpha+1)\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\sigma^\alpha}\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\lambda}{\sigma} \\ -\dfrac{\lambda}{\sigma} & \dfrac{\lambda^2}{\sigma^2} \end{pmatrix} = 0.$$

下述结果是参考文献 [3] 的主要定理.

定理 8.29. 设 $\sigma_0, \sigma_1 > 0$, c_j 和 $F_j (j=0,1,\theta)$ 都是有界连续函数, 并对一切 $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ 满足 (8.5), 则对于一切 $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ 和 $A_0, A_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$v_{\sigma_\theta, c_\theta}^{A_\theta, F_\theta}(T, x_\theta) \geqslant \left\{v_{\sigma_0, c_0}^{A_0, F_0}(T, x_0)\right\}^{\theta_0\sigma_0/\sigma_\theta}\left\{v_{\sigma_1, c_1}^{A_1, F_1}(T, x_1)\right\}^{\theta_1\sigma_1/\sigma_\theta},$$

其中 $\sigma_\theta = \theta_0\sigma_0 + \theta_1\sigma_1$, 而

$$v_{\sigma,c}^{A,F}(T,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[I_A(B_T^{x,\sigma})e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left\{F(B_T^{x,\sigma})+\int_0^T c(B_s^{x,\sigma})\mathrm{d}s\right\}}\right].$$

作为定理 8.29 的简单推论, 设 $\theta_0+\theta_1=1, \sigma_0=\sigma_1=\sigma$, 取 $c_0=c_1=c_\theta=0, F_0=F_1=F_\theta=0$ (即 $f_j\equiv 1$), $x_0=x_1=0$, 得

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[I_{A_\theta}(B_T^{0,\sigma})\right] \geqslant \left\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[I_{A_0}(B_T^{0,\sigma})\right]\right\}^{\theta_0}\left\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[I_{A_1}(B_T^{0,\sigma})\right]\right\}^{\theta_1}.$$

当 $T=1$ 时, 此即是

$$\int_{A_\theta} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \geqslant \left\{\int_{A_0} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right\}^{\theta_0}\left\{\int_{A_1} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right\}^{\theta_1}.$$

命 $\sigma\to\infty$, 得出第一种形式的 Brunn-Minkowski 不等式 (8.3). 我们注意, 后者是前者 "高斯型" 不等式的极限情形.

稍作改动, 假定 $f_j\,(j=0,1,\theta)$ 满足

$$f_\theta(x_\theta) \geqslant f_0(x_0)^{\theta_0} f_1(x_1)^{\theta_1}, \ x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n.$$

无妨设 f_j 有界、严格正, 则由定理 8.29 得出

$$\int_{A_\theta} f_\theta(x)e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \geqslant \left\{\int_{A_0} f_0(x)e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right\}^{\theta_0}\left\{\int_{A_1} f_1(x)e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right\}^{\theta_1}.$$

再命 $\sigma\to\infty$, 得出 Prékopa Leindler 不等式:

$$\int_{A_\theta} f_\theta(x)\mathrm{d}x \geqslant \left\{\int_{A_0} f_0(x)\mathrm{d}x\right\}^{\theta_0}\left\{\int_{A_1} f_1(x)\mathrm{d}x\right\}^{\theta_1}.$$

形式上, 这是一种反向的 Hölder 不等式. 此不等式也等价于 Brunn-Minkowski 不等式, 因此可视为函数形式的 Brunn-Minkowski 不等式.

定理 8.29 的证明 a) 先证明 $v_{\sigma,c}^F = v_{\sigma,c}^{\mathbb{R}^n,F}$ 的特殊情形. 使用光滑函数逼近, 无妨设 $c, F\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. 给定 $u_0,u_1\in\mathscr{U}(T)$, 命 $u_\theta=\theta_0u_0+\theta_1u_1$. 记 $X_t^{x,u,\sigma} = B_t^{x,\sigma}+h_u(t)$, 则 $B_t^{x_\theta,\sigma_\theta} = x_\theta+\sigma_\theta B(t) = \theta_0 B_t^{x_0,\sigma_0}+\theta_1 B_t^{x_1,\sigma_1}$,

$$\begin{aligned}X^{x_\theta,u_\theta,\sigma_\theta} &= B^{x_\theta,\sigma_\theta}+h_{u_\theta} = \theta_0\left(B^{x_0,\sigma_0}+h_{u_0}\right)+\theta_1\left(B^{x_1,\sigma_1}+h_{u_1}\right)\\ &= \theta_0 X^{x_0,u_0,\sigma_0}+\theta_1 X^{x_1,u_1,\sigma_1}.\end{aligned}$$

由于 c_j 和 $F_j\,(j=0,1,\theta)$ 满足条件 (8.5), 使用上述第二个函数例子 ($\phi_j=\psi_j^2$ 情形), 取 $\psi_j=|u_j|\,(j=0,1,\theta)$, 得出

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_\theta}\left[F_\theta\left(X_T^{x_\theta,\sigma_\theta}\right)+\int_0^T(c_\theta(X_t^{x_\theta,\sigma_\theta})+\frac{1}{2}|u_\theta(t)|^2)\mathrm{d}t\right]\\
&\leqslant\frac{\theta_0}{\sigma_0}\left[F_0(X_T^{x_0,\sigma_0})+\int_0^T\left(c_0\left(X_t^{x_0,\sigma_0}\right)+\frac{1}{2}|u_0(t)|^2\right)\mathrm{d}t\right]\\
&\quad+\frac{\theta_1}{\sigma_1}\left[F_1\left(X_T^{x_1,\sigma_1}\right)+\int_0^T\left(c_1\left(X_t^{x_1,\sigma_1}\right)+\frac{1}{2}|u_1(t)|^2\right)\mathrm{d}t\right].
\end{aligned}$$

两边取期望 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$, 得

$$\sigma_\theta J_{\sigma_\theta,c_\theta}^{F_\theta}(T,x_\theta,u_\theta)\leqslant\theta_0\sigma_0J_{\sigma_0,c_0}^{F_0}(T,x_0,u_0)+\theta_1\sigma_1J_{\sigma_1,c_1}^{F_1}(T,x_1,u_1).$$

留意

$$-\sigma\log v_{\sigma,c}^F(T,x)=\inf_{u\in\mathscr{U}(T)}\sigma J(t,x,u),\ (\text{命题 } 8.28)$$

证得所述断言.

b) 现在证明一般情形. 由 Lebesgue 测度的内正则性, 对于每 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, 存在紧集 $K\subset B$ 使得 $V_n(B\setminus K)$ 任意小. 因此, 无妨设 A_0 和 A_1 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧凸集. 给定 $\epsilon>0$, 命 $d(x,A)=\inf\{|x-y|:y\in A\},x\in\mathbb{R}^n$, $A^\epsilon=\{x\in\mathbb{R}^n: d(x,A)\leqslant\epsilon\}$, $\phi_A^\epsilon(x)=\min\{\epsilon,d(x,A)\}$, $x\in\mathbb{R}^n$. 再命

$$\widetilde{\phi}_\epsilon=\sigma_\theta\min\left\{\frac{\theta_0}{\sigma_0},\frac{\theta_1}{\sigma_1}\right\}\phi^\epsilon_{A_\theta^{\epsilon(\theta_0+\theta_1)}}.$$

那么容易验证

$$\frac{1}{\sigma_\theta}\widetilde{\phi}_\epsilon(x_\theta)\leqslant\frac{\theta_0}{\sigma_0}\phi_{A_0}^\epsilon(x_0)+\frac{\theta_1}{\sigma_1}\phi_{A_1}^\epsilon(x_1),\ x_0,x_1\in\mathbb{R}^n.$$

由已证的 a),

$$v_{\sigma_\theta,c_\theta}^{m\widetilde{\phi}_\epsilon+F_\theta}(T,x_\theta)\geqslant\left\{v_{\sigma_0,c_0}^{m\phi_{A_0}^\epsilon+F_0}(T,x_0)\right\}^{\theta_0\sigma_0/\sigma_\theta}\left\{v_{\sigma_1,c_1}^{m\phi_{A_1}^\epsilon+F_1}(T,x_1)\right\}^{\theta_1\sigma_1/\sigma_\theta},$$
$$x_0,x_1\in\mathbb{R}^n,\ t\geqslant0,\ m\geqslant1.$$

注意在 A_j 上, $\phi_{A_j}^\epsilon=0$ (在 A_θ 上, $\widetilde{\phi}_\epsilon=0$), 而在 $\phi_{A_j}^\epsilon>0$ 的区域上, 当 $m\to\infty$ 时, 被积函数趋于零. 这样, 先令 $m\to\infty$, 再令 $\epsilon\to0$, 便得到所需的不等式. □

最后, 我们指出, 虽然 Brunn-Minkowski 不等式是一个纯粹的几何结果, 不涉及随机性, 但这里所介绍的概率证明并没有用到多少特别的几何知识.

作为本节的结束, 我们介绍 Prékopa-Leindler 不等式的一种更为直接的证明 (取自 [22]).

定理 8.30 (Prékopa-Leindler 不等式). 设 $\lambda \in (0,1)$, f, g, h 非负 Lebesgue 可积, 满足

$$h((1-\lambda)x+\lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x\right)^{\lambda}.$$

证明　a) 先证明一维情形. 由齐次性, 可设

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g = 1.$$

定义 u, v: $(0,1) \to \mathbb{R}$ 为满足

$$\int_{-\infty}^{u(r)} f = \int_{-\infty}^{v(r)} g = r$$

的最小数. 则 u 和 v 严格上升, 从而几乎处处可微. 命 $w(r) = (1-\lambda)u(r) + \lambda v(r)$. 那么 $f(u(r))u'(r) = g(v(r))v'(r) = 1$, 进而由算术平均–几何平均不等式,

$$\begin{aligned} w'(r) &= (1-\lambda)u'(r) + \lambda v'(r) \geqslant u'(r)^{1-\lambda} v'(r)^{\lambda} \\ &= f(u(r))^{\lambda-1} g(v(r))^{-\lambda}, \end{aligned}$$

倘若 $f(u(r)) \neq 0$ 且 $g(v(r)) \neq 0$. 因此

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}x &\geqslant \int_{\mathrm{Range}(w)} h(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 h(w(r))w'(r)\mathrm{d}r \\ &\geqslant \int_0^1 f(u(r))^{1-\lambda} g(v(r))^{\lambda} f(u(r))^{\lambda-1} g(v(r))^{-\lambda} \mathrm{d}r = 1, \end{aligned}$$

其中的第二个不等式是因为对于一般的增函数 w, 我们仅有

$$\int_{r_1}^{r_2} w'(r)\mathrm{d}r \leqslant w(r_2) - w(r_1)$$

而非等式. 这相当于 h 为单个区间的示性函数情形, 对于一般的 h, 可用简单函数逼近.

b) 高维情形使用归纳法. 固定 $s \in \mathbb{R}$, 定义 $f_s : \mathbb{R}^{n-1} \to [0,\infty)$, $f_s(x) = u(x,s)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. 类似地定义 g_s 和 h_s. 这样, 如果 $s = (1-\lambda)s_0 + \lambda s_1$, $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, 则由假设条件知

$$h_s((1-\lambda)x+\lambda y) \geqslant f_{s_0}(x)^{1-\lambda} g_{s_1}(y)^{\lambda}, \quad x, y \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

于是由归纳假设得

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_s \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_0}\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_1}\mathrm{d}x\right)^{\lambda}.$$

将左方视为 s 的一元函数, 将右方两项分别视为 s_0 和 s_1 的一元函数, 化为一维情形. 因此由 a) 得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_s\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{\lambda}. \quad \square$$

定理 (8.30) 证明的关键是引进 "变量替换" u 和 v. 通过这两个函数, 分别将分布 $f\mathrm{d}x$ 和分布 $g\mathrm{d}x$ 与均匀分布耦合在一起. 这种方法也适用高维的欧氏空间, 只是要困难得多. 研究这种映射的存在性、正则性以及各种应用, 构成了当前偏微分方程和凸几何的一个重要研究方向.

定理 8.30 所述的 Prékopa–Leindler 不等式比之前所证明的要广. 因为先前要求 f、g 和 h 有界连续. 然而通过适当的逼近程序, 可证两者等价.

§8.10 补充与习题

1. (分部积分公式) 经典的公式如次: 设 f, g 右连续、非减的实函数, 则

$$(fg)|_a^b = \int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) + \int_a^b g(x-)\mathrm{d}f(x).$$

其证明不难:

$$\begin{aligned}
&\big(f(b)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big)\\
&= \iint_{a\leqslant x\leqslant y\leqslant b} \mathrm{d}f(x)\mathrm{d}g(y) + \iint_{a\leqslant y< x\leqslant b} \mathrm{d}f(x)\mathrm{d}g(y)\\
&= \int_a^b \mathrm{d}g(y)\int_a^y \mathrm{d}f(x) + \int_a^b \mathrm{d}f(x)\int_a^{x-} \mathrm{d}g(y)\\
&= \int_a^b f(y)\mathrm{d}g(y) - f(a)[g(b)-g(a)]\\
&\qquad + \int_a^b g(x-)\mathrm{d}f(x) - g(a)[f(b)-f(a)].
\end{aligned}$$

试证随机情形的如下分部积分公式. 给定

$$X_t = X_0 + M_t + U_t,\ Y_t = Y_0 + N_t + V_t,\ t \geqslant 0,$$

此处 $(M_t), (N_t) \in \mathscr{M}_c^{loc}$, (U_t) 和 (V_t) 为连续有界变差过程, $U_0 = V_0 = 0$, 则

$$\int_0^T X_t\mathrm{d}Y_t = X_TY_T - X_0Y_0 - \int_0^T Y_t\mathrm{d}X_t - \langle M, N\rangle(T),\ T \geqslant 0.$$

2. 给定停时 τ 和 $X\in\mathscr{M}_c^2$. 令

$$X_t^\tau = X_{t\wedge\tau},\qquad t\geqslant 0\ (\text{停止于 }\tau,\text{ 即从 }\tau\text{ 开始停止不动}).$$
$${}^\tau X_t = X_t - X_t^\tau,\qquad t\geqslant 0\ (\tau\text{ 之前改为常数零}).$$

试证: $X^\tau, {}^\tau X\in\mathscr{M}_\tau^2$ 且

$$\langle X^\tau\rangle(t) = \langle X\rangle(t\wedge\tau),\qquad \langle{}^\tau X\rangle(t) = \langle X\rangle(t) - \langle X\rangle(t\wedge\tau),\qquad \text{a.s.}$$

提示:

(a) 设 $t\geqslant s$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[X_{t\wedge\tau}(X_{t\wedge\tau}-X_t)|\mathscr{F}_s]\\
&\quad=\mathbb{E}[I_{[\tau\leqslant s]}X_\tau(X_\tau-X_t)|\mathscr{F}_s]+\mathbb{E}[I_{[\tau>s]}X_{t\wedge\tau}(X_{t\wedge\tau}-X_t)|\mathscr{F}_s].\\
&\text{右方第 1 项}=X_\tau^2 I_{[\tau\leqslant s]}-X_\tau I_{[\tau\leqslant s]}\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s]\\
&\quad=X_\tau(X_\tau-X_t)I_{[\tau\leqslant s]}=X_{s\wedge\tau}(X_{s\wedge\tau}-X_t),\qquad\text{a.s.}\\
&\text{右方第 2 项}=I_{[\tau>s]}\mathbb{E}[X_{t\wedge\tau}(X_{t\wedge\tau}-X_t)|\mathscr{F}_{s\wedge\tau}]\\
&\quad=I_{[\tau>s]}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_{t\wedge\tau}(X_{t\wedge\tau}-X_t)|\mathscr{F}_{t\wedge\tau}]|\mathscr{F}_{s\wedge\tau}\big]=0,\qquad\text{a.s.}
\end{aligned}$$

故 $(X_{t\wedge\tau}(X_{t\wedge\tau}-X_t),\mathscr{F}_t,\mathbb{P})$ 是鞅.

(b) 为计算 $\langle{}^\tau X\rangle(t)$, 使用

$$(X_t-X_{t\wedge\tau})^2 = X_t^2 - X_{t\wedge\tau}^2 + 2X_{t\wedge\tau}(X_{t\wedge\tau}-X_t).$$

3. 给定 $X,Y\in\mathscr{M}_c^2((\mathscr{F}_t),\mathbb{P})$ 和停时 τ. 试证

$$\langle X^\tau, Y\rangle = \langle X, Y\rangle^\tau,$$

此处 $\langle X^\tau,Y\rangle(\mathrm{d}t) = I_{[0,\tau)}(t)\langle X,Y\rangle(\mathrm{d}t)$. 其次, 命 $\mathscr{F}_t^X=\sigma(X_s:0\leqslant s\leqslant t)$, $\mathscr{F}_t^Y=\sigma(Y_s:0\leqslant s\leqslant t)$. 试证: $X,Y\in\mathscr{M}_c^2((\mathscr{F}_t^X\times\mathscr{F}_t^Y),\mathbb{P})$; 可能相差一个 $\mathbb{P}$ 零集, 关于 $((\mathscr{F}_t^X\times\mathscr{F}_t^Y),\mathbb{P})$ 所定义的 $\langle X,Y\rangle$ 重合于关于 $((\mathscr{F}_t),\mathbb{P})$ 所定义的 $\langle X,Y\rangle$. 最后, 若对某 $T>0$, $\mathscr{F}_t^X$ 与 $\mathscr{F}_t^Y$ 独立, 则 $\langle X,Y\rangle(t)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$.

提示: 因 $XY-\langle X,Y\rangle$ 是鞅, 所以 $(XY)^\tau-\langle X,Y\rangle^\tau = X^\tau Y^\tau-\langle X,Y\rangle^\tau$ 也是鞅. 为证 $X^\tau Y-\langle X,Y\rangle^\tau$ 是鞅, 只需证 $X^\tau(Y-Y^\tau)$ 是鞅. 但当 $t>s$ 时,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[X_t^\tau(Y_t-Y_t^\tau)|\mathscr{F}_s\big]\\
&=\mathbb{E}\big[I_{[\tau\leqslant s]}X_\tau(Y_t-Y_\tau)|\mathscr{F}_s\big]+I_{[\tau>s]}\mathbb{E}\big[X_t^\tau(Y_t-Y_t^\tau)|\mathscr{F}_{s\wedge\tau}\big]\\
&=I_{[\tau\leqslant s]}X_\tau(Y_s-Y_\tau)+I_{[\tau>s]}\mathbb{E}\big[X_t^\tau(Y_t-Y_t^\tau)|\mathscr{F}_{t\wedge\tau}|\mathscr{F}_{s\wedge\tau}\big]\\
&=X_s^\tau(Y_s-Y_s^\tau),\qquad\text{a.s.}
\end{aligned}$$

4. 给定 $X \in \mathscr{M}_c^2$ 和停时 $\sigma \leqslant \tau$. 设 $\gamma \in \mathscr{F}_\sigma$ 满足

$$\mathbb{E}\left[\gamma^2 \cdot \big(\langle X\rangle(T\wedge\tau) - \langle X\rangle(T\wedge\sigma)\big)\right] < \infty.$$

并命 $\alpha = I_{[\sigma,\tau)}\gamma$. 试证: $\alpha \in L^2_{\ell oc}(\langle X\rangle, \mathbb{P})$ 而且 $\alpha_\bullet X$ 存在并等于 $\gamma(X^\tau(\bullet) - X^\sigma(\bullet))$.

提示: 只证后一断言. 分三步.

(a) 设 $(Z_t) \in \mathscr{M}_c^2$, $Z^\sigma = 0$. 则

$$\begin{aligned}
&\langle Z, Y\rangle^\sigma = 0, \qquad \forall Y \in \mathscr{M}_c^2.\\
&Z^\sigma = 0 \Rightarrow Z^\sigma Y = 0 \Rightarrow \langle Z^\sigma, Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle Z, Y\rangle^\sigma = 0\\
&\Rightarrow \langle Z, Y\rangle_t = \langle Z, Y\rangle_{t\vee\sigma}.
\end{aligned}$$

(b) 如 $\gamma \in \mathscr{F}_\sigma$, 则 $\langle \gamma Z, Y\rangle_t = \langle \gamma Z, Y\rangle_{t\vee\sigma} = \gamma\langle Z, Y\rangle_{t\vee\sigma}$. 事实上,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\gamma Z_{t\vee\sigma}Y_{t\vee\sigma} - \gamma\langle Z, Y\rangle_{t\vee\sigma}|\mathscr{F}_{s\vee\sigma}] &= \gamma\mathbb{E}[Z_{t\vee\sigma}Y_{t\vee\sigma} - \langle Z, Y\rangle_{t\vee\sigma}|\mathscr{F}_{s\vee\sigma}]\\
&= \gamma[Z_{s\vee\sigma}Y_{s\vee\sigma} - \langle Z, Y\rangle_{s\vee\sigma}], \qquad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

(c) 今取 $Z = X^\tau - X^\sigma$. 则

$$\begin{aligned}
&\langle \gamma(X^\tau - X^\sigma), Y\rangle = \gamma\langle X^\tau - X^\sigma, Y\rangle = \gamma(\langle X^\tau, Y\rangle - \langle X^\sigma, Y\rangle)\\
&\quad = \gamma(\langle X, Y\rangle^\tau - \langle X, Y\rangle^\sigma).\\
&\langle \gamma(X^\tau - X^\sigma), Y\rangle(\mathrm{d}t) = \gamma\big(\langle X, Y\rangle^\tau(\mathrm{d}t) - \langle X, Y\rangle^\sigma(\mathrm{d}t)\big)\\
&\quad = \gamma\Big(I_{[0,\tau)}\langle X, Y\rangle(\mathrm{d}t) - I_{[0,\sigma)}\langle X, Y\rangle(\mathrm{d}t)\Big)\\
&\quad = \gamma I_{[\sigma,\tau)}\langle X, Y\rangle(\mathrm{d}t).
\end{aligned}$$

5. 给定 $X \in \mathscr{M}_c^2$.

(a) 被积函数的局部化的积分等于积分的局部化. 设 $\sigma \leqslant \tau$ 为停时, $\alpha \in L^2_{\ell oc}(\langle X\rangle, \mathbb{P})$, 试证: $I_{[\sigma,\tau)}\alpha_t \in L^2_{\ell oc}(\langle X\rangle, \mathbb{P})$ 且

$$\int_{T\wedge\sigma}^{T\wedge\tau} \alpha_t \mathrm{d}X_t \equiv \int_0^T I_{[\sigma,\tau)}\alpha_t \mathrm{d}X_t = \int_0^{T\wedge\tau} \alpha_t \mathrm{d}X_t - \int_0^{T\wedge\sigma} \alpha_t \mathrm{d}X_t, \text{ a.s.}$$

(b) 随机积分之微分. 设 $\beta \in L^2_{\ell oc}(\langle X\rangle, \mathbb{P})$, $\alpha \in L^2_{\ell oc}(\beta^2\langle X\rangle, \mathbb{P})$, 试证:

$$\int_0^T \alpha_t \mathrm{d}\left(\int_0^t \beta_s \mathrm{d}X_s\right) = \int_0^T \alpha_s\beta_s \mathrm{d}X_s, \qquad \text{a.s.}$$

提示: (a) 中的等式只用到积分的线性性.

$$\begin{aligned}\int_0^T I_{[\sigma,\tau)}(t)\alpha_t \mathrm{d}X_t &= \int_0^T \Big(I_{[0,\tau)(t)}\alpha_t - I_{[0,\sigma)}\alpha(t)\Big)\mathrm{d}X_t \\ &= \int_0^T I_{[0,\tau)(t)}\alpha_t \mathrm{d}X_t - \int_0^T I_{[0,\sigma)}\alpha_t \mathrm{d}X_t \\ &= \int_0^{T\wedge\tau} \alpha_t \mathrm{d}X_t - \int_0^{T\wedge\tau} \alpha_t \mathrm{d}X_t.\end{aligned}$$

其次对于 (b), 注意到 $\forall Y \in \mathscr{M}_c^2$,

$$\begin{aligned}&\left\langle\!\!\left\langle \int_0^\bullet \alpha_u \mathrm{d}\Big(\int_0^u \beta_s \mathrm{d}X_s\Big), Y \right\rangle\!\!\right\rangle(\mathrm{d}t) = \alpha_t \left\langle\!\!\left\langle \int_0^\bullet \beta_s \mathrm{d}X_s, Y \right\rangle\!\!\right\rangle(\mathrm{d}t) \\ &= \alpha_t\beta_t\langle X, Y\rangle(\mathrm{d}t) = \left\langle\!\!\left\langle \int_0^\bullet \alpha_u\beta_u \mathrm{d}X_u, Y \right\rangle\!\!\right\rangle(\mathrm{d}t).\end{aligned}$$

故由唯一性即得断言.

6. 设 X 与 σ 如上. 再设 $Y \in (\mathscr{M}_c^2)^e$, $\tau:\ [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^e$ 满足类似条件. 试证:

(a) $\displaystyle\int_0^\bullet [\sigma,\tau]\,\mathrm{d}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \int_0^\bullet \sigma \mathrm{d}X + \int_0^\bullet \tau \mathrm{d}Y$;

(b) $\displaystyle\left\langle\!\!\left\langle \int_0^\bullet \sigma \mathrm{d}X, \int_0^\bullet \tau \mathrm{d}Y \right\rangle\!\!\right\rangle = \sigma(t)\langle\langle X, Y\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\tau(t)^*$, 此处

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = (\langle X^i, Y^j\rangle:\ 1 \leqslant i \leqslant d,\ 1 \leqslant j \leqslant e);$$

(c) 试证 $\int_0^\bullet \sigma \mathrm{d}X$ 是唯一的 $Y \in (\mathscr{M}_c^2)^N$ 使 $Y(0) = 0$ 且

$$\left\langle\!\!\left\langle \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right\rangle\!\!\right\rangle(\mathrm{d}t) = \begin{bmatrix} I \\ \sigma(t) \end{bmatrix} \langle\langle X, X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\,[I, \sigma(t)^*], \qquad \text{a.s.}$$

此处 I 为单位方阵;

(d) 设 $\tau:\ [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}^M \otimes \mathbb{R}^N$, 循序可测, σ 以及 $\tau\sigma$ 都满足前述条件:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{Tr}\big(\sigma(t)\langle\langle X, X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\sigma^*(t)\big)\right] < \infty, \qquad \forall T > 0,$$

则

$$\int_0^\bullet \tau(t)\mathrm{d}\Big(\int_0^t \sigma \mathrm{d}X\Big) = \int_0^\bullet \tau\sigma \mathrm{d}X, \qquad \text{a.s.}$$

提示:

(a) 依定义

$$(\theta, \sigma_\bullet X)_{\mathbb{R}^N} = \int_0^\bullet (\sigma^*\theta)\mathrm{d}X, \qquad \forall\theta \in \mathbb{R}^N.$$

这样, 对 $\theta \in \mathbb{R}^N$,

$$\left(\theta, \int_0^\bullet [\sigma,\tau]\mathrm{d}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)_{\mathbb{R}^N} = \int_0^\bullet [\sigma,\tau]^*\theta\, \mathrm{d}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^\bullet \begin{bmatrix} \sigma^* \\ \tau^* \end{bmatrix} \theta\, \mathrm{d}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \int_0^\bullet \begin{bmatrix} \sigma^*\theta \\ \tau^*\theta \end{bmatrix} \mathrm{d}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

$$\left(\theta, \int_0^\bullet \sigma\mathrm{d}X + \int_0^\bullet \tau^*\theta\mathrm{d}Y\right) = \int_0^\bullet \sigma^*\theta\mathrm{d}X + \int_0^\bullet \tau^*\theta\mathrm{d}Y.$$

因此, 只需证

$$\int_0^\bullet \begin{bmatrix} \sigma^*\theta \\ \tau^*\theta \end{bmatrix} \mathrm{d}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \int_0^\bullet \sigma^*\theta\mathrm{d}X + \int_0^\bullet \tau^*\theta\mathrm{d}Y.$$

当 $\sigma^*\theta$ 和 $\tau^*\theta$ 属于 $(L^2_{\ell oc})^N$ 的特殊情形时成立. 然后用极限过渡得出一般情形.

(b) 仿前面关于 $\langle\theta_\bullet X, \eta_\bullet Y\rangle$ 的证法可证:

$$\langle\theta_\bullet X, \eta_\bullet Y\rangle = \theta\langle\langle X, Y\rangle\rangle\eta.$$

现在, 对一切 $\theta \in \mathbb{R}^N$,

$$\left\langle \int_0^\bullet \sigma^*\theta\mathrm{d}X, \int_0^\bullet \tau^*\theta\mathrm{d}Y \right\rangle (\mathrm{d}t)$$
$$= (\sigma^*\theta)^*(t)\langle\langle X, Y\rangle\rangle(\mathrm{d}t)(\tau^*\theta)(t) = \theta^*\sigma(t)\langle\langle X, Y\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\tau^*(t)\theta.$$

取 θ 为 $\mathbb{R}^N$ 的基, 并利用 $\langle\theta, \int_0^\bullet \sigma\mathrm{d}X\rangle$ 可算出各分量.

(c) 先证 $Y = \int_0^\bullet \sigma\mathrm{d}X$ 满足等式. 因为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \int_s^\bullet \sigma\mathrm{d}X \end{bmatrix} = \int_0^\bullet \begin{bmatrix} I \\ \sigma \end{bmatrix} \mathrm{d}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

于是等式由 (b) 导出. 往证唯一性. 由上式得出

$$\langle\langle Y, X\rangle\rangle(\mathrm{d}t) = \sigma(t)\langle\langle X, X\rangle\rangle(\mathrm{d}t).$$

写出分量形式

$$\langle Y^i, X^j\rangle(\mathrm{d}t) = \sum_k \sigma_{ik}(t)\langle X^k, X^j\rangle(\mathrm{d}t).$$

但 $\langle Y^i, \int_0^\bullet \eta_j \mathrm{d}X^j\rangle(\mathrm{d}t) = \eta_j(t)\langle Y^i, X^j\rangle(\mathrm{d}t)$. 故有

$$\left\langle Y^i, \int_0^\bullet \eta \mathrm{d}X\right\rangle(\mathrm{d}t) = \sigma_{i\bullet}(t)\langle\langle X, X\rangle\rangle(\mathrm{d}t)\eta(t).$$

然后使用上节的唯一性得出

$$Y^i = \int_0^\bullet \sigma^*_{\bullet i}(t)\mathrm{d}X_t.$$

进而

$$(\theta, Y)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i=1}^N \theta_i Y^i = \int_0^\bullet \sum_{i=1}^N \sigma^*_{\bullet i}(t)\theta_i \mathrm{d}X_t = \int_0^\bullet (\sigma^*(t)\theta)\mathrm{d}X_t.$$

故 $Y = \int_0^\bullet \sigma(t)\mathrm{d}X_t$.

7. 证明高维的 Girsanov 定理 (定理 8.27 中 $N > 1$ 的情形).

后　记

这里介绍一些进一步的读物和本书部分题材的出处. 由于本书的多半题材都是经典的, 我们未能认真地考察历史, 给出所有结果的原始文献, 而只是给出所参考的书籍; 对于那些较新的材料, 当然需要指明所用的原始文献.

(一) 进一步的读物

- 关于随机过程的基础性读物, 国内已出版多部优秀教材. 例如 [60] (也见 [61]), [32], [26], [43], [49], [50], [24], [34]. 此处, 我们也列举几部有代表性的英文版教材: [40], [23], [47], [38], [21]. 从这些著作中, 读者不仅可以找到同一题材的更加丰富的内容或不同的处理手法, 而且可以找到不包含在本书之中的更为广泛的题材. 还有一些结合工程、公共服务行业、医药、生态、金融、计算机科学等专门领域的随机过程教材, 因为为数不少且笔者不完全熟悉, 故不在这里一一列出.

- 关于马尔可夫链或更一般的马尔可夫跳过程的现代理论, 可参考研究专著 [62], [29], [30], [31], [67], [5], [10], [16], [1], [45].

- 关于随机分析的现代理论, 可参考研究专著 [64], [27], [65], [35], [57].

读者至少可以浏览这些著作中的若干部或若干章节, 以领略现代随机过程理论新发展的部分景观. 对于有志于研究随机过程理论的读者, 则需要精读其中的一、两部专著. 在下一部分里, 还将给出若干章节的进一步的读物.

(二) 所用题材的注记

先看第一篇.

- §1.1 取自 [6]. 也见 [11]. 注 1.7 所述的对于搜索引擎的应用, 参见综述报告 [41].

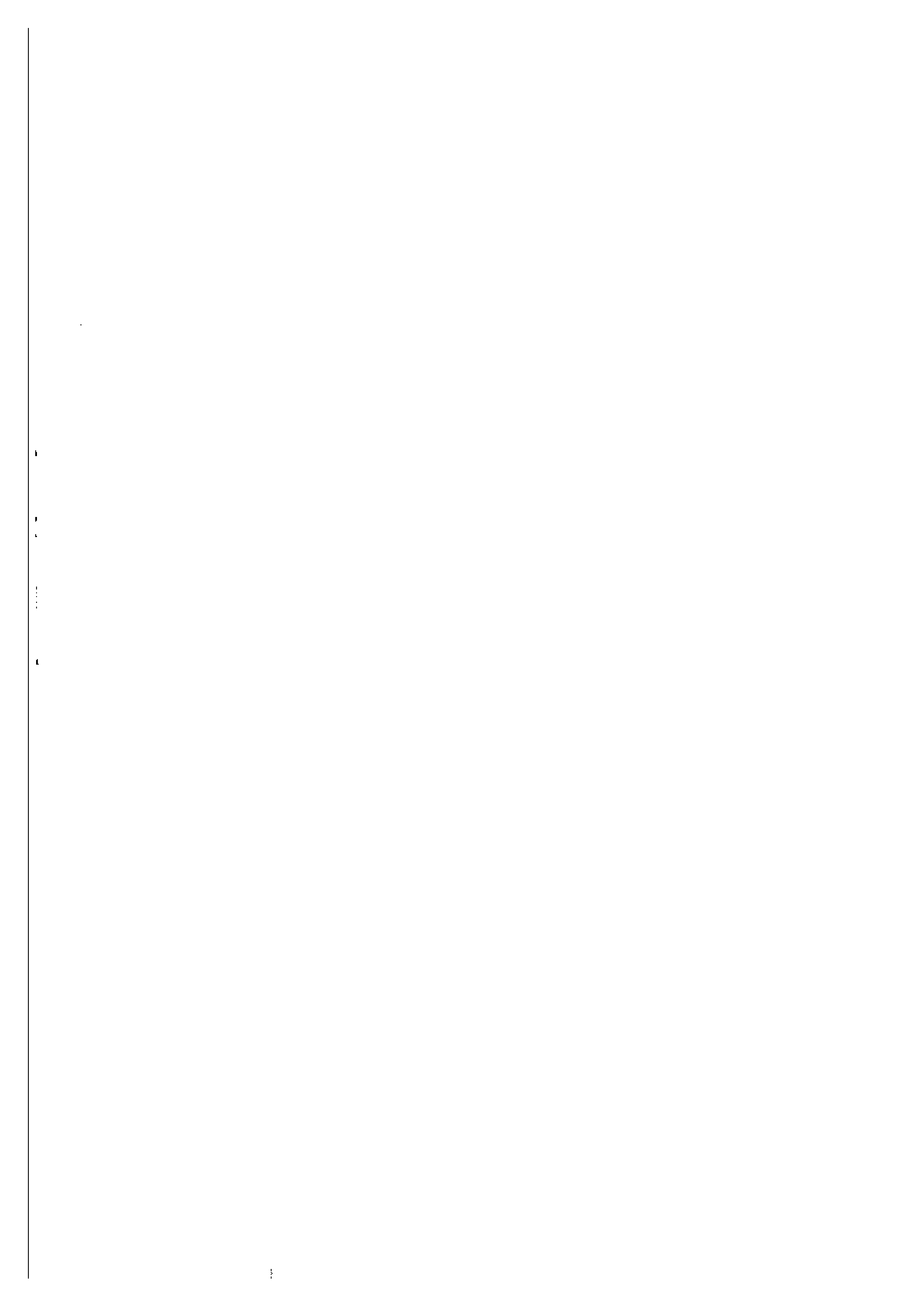
- §1.2 和 §1.3 基本上取自 [60], 关于遍历性的耦合证法取自 [2] 和 [49].

- §1.4 取自 [5] 和 [10]. 最小非负解理论的系统研究来自 [29].
- §1.5 主要源自 [39].
- §2.1 基本上都是经典的, 原始文献可在 [5], [10], [29], [49] 或前一部分中所列的关于马氏链的专著中找到. 稍近一些的定理 2.9 可在 [5] 或 [10] 中找到.
- §2.2 定理 2.12 来自 [5]. 定理 2.14 的充分性属于 Reuter [52]; 必要性属于 [29]; Tweedie 的结果来自 [58]. 关于遍历性, 虽然 [5] 中已处理过一部分, 但较完整的处理取自 [10].
- §2.3 不包含吸收态的单生过程在 [5] 中已详细介绍过. 但其中关于含吸收态的断言失误. 此时的完整处理来自 [7].
- §2.4 分支过程是许多教材都要讨论的, 但扩展的分支过程的研究则要晚得多. 这里的材料取自 [15].
- §3.1 除去定理 3.6 而外, 本节材料取自 [14]. 定理 3.6 属于 [44]. 本节的内容可在 [5] 或 [10] 中找到.
- §3.2 的结果是陈木法在一系列论文中完成的. 谱隙估计及相关论题的研究是当前活跃的研究方向, 详见 [11] 和 [59].
- §3.3 是为初学者写的通俗介绍, 系初次发表.
- §4.1 和 §4.2 取材于 [60]. 关于 T 前 σ代数 $\mathscr{F}_T$ 的定义的详细分析系初次发表.
- §4.3 最优停止问题是概率论的一个重要分支, 有许多重要应用, 参见 [36].

再看第二篇.

- §5.1 – §5.3 取自 [64], 也见 [27]. §5.6 的第一个例子取自 [17]. 第二个例子是鞅方法 [57] 的典型应用, 它的好处是同时适用于本书未涉及的非时齐情形, 这是博士学位论文 [71] 的主题.
- §6.1 – §6.4 基本取材于 [60].
- §7.1 – §7.3 取材于 [47] 和 [25].
- §7.4 定理 7.9—7.11 取自 [35]. 定理 7.12 源于 [13], 其分析证明取自 [8], 末项断言是由 [9] 得到的改进形式.
- §8.1 – §8.8 取材于 [56].

§8.9 中所述的三种数学工具是每一本随机分析的书中都要讲到的. 命题 8.26 虽然简单, 但却是当前随机共形理论研究的出发点, 参见综合报告 [63]. 定理 8.29 属于 [3]. 定理 8.30 及更多的几何应用, 参见综合报告 [22].



参考文献

[1] Anderson, W J. *Continuous-Time Markov Chains*. New York: Springer Series in Statistics, 1991.

[2] Billingsley, P. *Probability and Measure*. Third Edition. New York: Wiley, 1995.

[3] Borell, C. *Diffusion equations and geometric inequalities*. Potential Anal., 2000, 12: 49–71.

[4] Chen, Mu-Fa (陈木法). *Coupling of jump processes*. Acta Math. Sinica, New Series, 1986, 2(2): 123–136.

[5] 陈木法. 跳过程与粒子系统. 北京: 北京师范大学出版社, 1986.

[6] 陈木法. 经济最优化的随机模型. 应用概率统计, 1992, (I), 8(3): 289–294; (II), 8(4): 374–377.

[7] Chen, Mu-Fa. *Single birth processes*. Chin. Ann. of Math., 1999, 20B(1): 77–82.

[8] 陈木法. 一维情形第一特征值对偶变分公式的分析证明. 中国科学, 1999, 29(4): 327–336.

[9] 陈木法. 一维情形第一特征值的变分公式和逼近定理. 中国科学, 2001, 31(1): 28–36.

[10] Chen, Mu-Fa. *From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems*. Second edition. Singapore: World Scientific, 2004.

[11] Chen, Mu-Fa. *Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory*. New York: Springer, 2005.

[12] 陈木法, 李勇. 经济的随机模型. 北京师范大学学报, 1994, 30(2): 185–194.

[13] Chen, Mu-Fa, Wang, Feng-Yu (王凤雨). *Estimation of spectral gap for elliptic operators,* Tran. Amer. Math. Soc., 1997, 349: 1239–1267.

[14] 陈木法, 汪培庄, 侯振挺, 郭青峰, 钱敏, 钱敏平, 龚光鲁. 可逆马尔可夫过程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1979.

[15] Chen, Rong-Rong (陈嵘嵘). *An extended class of time-continuous branching processes.* J. Appl. Prob., 1997, 34(1): 14–23.

[16] Chung, Kai Lai (钟开莱). *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities.* Second edition. New York: Springer, 1967.

[17] Chung, Kai Lai. *A Course on Probability Theory.* Second edition. New York: Academic Press, 1974. (有中译本)

[18] Fang, Shi-Zan (方诗赞), Zhang, Tu-Sheng (张土生). *Stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients: pathwise uniqueness and nonexplosion.* J. Funct. Anal., 2004, 213 (2): 440–465.

[19] Feller, W. *On the integro-differential equations of pure discontinuous Markov processes.* Tran. Amer. Math. Soc., 1940, 48: 488–515.

[20] Feller, W. *On boundaries and lateral conditions for Kolmogorov differential equations.* Ann. Math., 1957, 65: 527–570.

[21] Friedman, A. *Stochastic Differential Equations and Applications, Vol. I, II.* New York: Academic Press, 1975–1976.

[22] Gardner, R J. *The Brunn-Minkowski inequality.* Bull. (New Ser.) Amer. Math. Soc., 2002, 39(3): 355–405.

[23] Gihman, I I, Skorohod, A V. *The Theory of Stochastic Processes, Vol. I, II, III.* New York: Springer, 1979.

[24] 龚光鲁. 随机微分方程引论. 第二版. 北京: 北京大学出版社, 2000.

[25] Grimmett, G R, Stirzaker, D R. *Probability and Random processes.* Third edition. London: Oxford University Press, 2001.

[26] 何声武. 随机过程论. 上海: 华东师范大学出版社, 1989.

[27] 何声武, 汪嘉冈, 严加安. 半鞅与随机分析. 北京: 科学出版社, 1995.

[28] Hennion, H. *Limit theorems for products of positive matrices.* Ann. Probab., 25(4), 1545–1587.

[29] 侯振挺, 郭青峰. 齐次可列马尔可夫过程. 北京: 科学出版社, 1978.

[30] 侯振挺, 邹捷中, 张汉君, 刘再明, 肖果能, 陈安岳, 费志凌. 马尔可夫过程的 Q 矩阵问题. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1994.

[31] 侯振挺, 刘再明, 张汉君, 李俊平, 邹捷中, 袁成桂. 生灭过程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2000.

[32] 胡迪鹤. 随机过程论. 武汉: 武汉大学出版社, 2000.

[33] 华罗庚. 计划经济下大范围最优化的数学理论(III). 科学通报, 1984, 13: 769–772.

[34] 黄志远. 随机分析学基础. 北京: 科学出版社, 2001.

[35] Iketa, N, Watanabe, S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. Amsterdam: North-Holland, 1981.

[36] 金治明. 最优停止理论及其应用. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995.

[37] Kallenberg, O. *Foundation of Modern Probability*. New York: Springer-Verlag, 1997. (有中译本)

[38] Karatzas, I, Shreve, S E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. New York: Springer, 1990.

[39] Karlin, S, Taylor, H M. *A Second Course in Stochastic Processes*. Second Edition. New York: Academic Press, 1975.

[40] Karlin, S, Taylor, H M. *A Second Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press, 1981.

[41] Langville, A N, Meyer, C D. *A survey of eigenvector method for web information retrieval*. SIAM Review, 2005, 47(1): 135–161.

[42] Langville, A N, Meyer, C D. *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*. New Jersey: Princeton University Press, 2006.

[43] 李漳南, 吴荣. 随机过程教程. 北京: 高等教育出版社, 1987.

[44] Lyons, T J. *A simple criterion for transient of a reversible Markov chains*. Ann. Probab., 1983, 11(2): 393–402.

[45] Meyn, S P, Tweedie, R L. *Markov Chains and Stochastic Stability*. New York: Springer, 1993.

[46] Neveau, J. *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability.* San Francisco: Holden-Day, 1965.

[47] Øksendal, B K. *Stochastic Differential Equation*, sixth edition. New York: Springer, 2003.

[48] Oguntuase, J. *On an inequality of Gronwall.* J. Inequal. Pure and Appl. Math., 2001, 2(1): Art.9.

[49] 钱敏平. 随机过程引论. 北京: 北京大学出版社, 1990.

[50] 钱敏平, 龚光鲁. 应用随机过程. 北京: 北京大学出版社, 1998.

[51] Reuter, G E H. *Denumerable Markov processes.* Acta Math., 1957, 97: 1–46.

[52] Reuter, G E H. *Competition processes.* Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1961, Vol. 2.: 421–430.

[53] Rosenblatt, M. *Random Processes.* New York: Springer-Verlag, 1974.

[54] Shiryayev, A N. *Probability.* New York: Springer-Verlag, 1984.

[55] Sinclair, A. *Algorithms for Random Generation and Counting: a Markov chain approach.* Boston: Birkhäuser, 1993.

[56] Stroock, D W. *Lecture on Stochastic Analysis: Diffusion Theory.* London: London Math. Soc., 1987.

[57] Stroock, D W, Varadhan, S R S. *Multidimensional Diffusion Processes.* New York: Springer-Verlag, 1979.

[58] Tweedie, R L. *Criteria for ergodicity, exponential ergodicity and strong ergodicity of Markov Processes.* J. Appl. Prob. 1981, Vol. 18: 122–130.

[59] Wang, Feng-Yu (王凤雨). *Functional Inequalities, Markov Processes, and Spectral Theory.* 北京: 科学出版社, 2004.

[60] 王梓坤. 随机过程论. 北京: 科学出版社, 1965.

[61] 王梓坤. 随机过程通论 (上卷). 北京: 北京师范大学出版社, 1996.

[62] 王梓坤, 杨向群. 生灭过程与马尔可夫链. 第二版. 北京: 科学出版社, 2005.

[63] Werner, W. *Conformal restriction and related questions.* Probability Surveys, 2005, Vol.2: 145–190.

[64] 严加安. 鞅与随机积分引论. 上海: 上海科技出版社, 1981.

[65] 严加安, 彭实戈, 方诗赞, 吴黎明. 随机分析选讲. 北京: 科学出版社, 1997.

[66] 严士健, 王隽骧, 刘秀芳. 概率论基础. 北京: 科学出版社, 1982.

[67] 杨向群. 可列马尔科夫过程构造论. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1986.

[68] Yosida, K. *Functional Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1980.

[69] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义. 上册. 北京: 北京大学出版社, 1990.

[70] 张恭庆, 郭懋正. 泛函分析讲义. 下册. 北京: 北京大学出版社, 1990.

[71] 郑君礼. 格子分形上 Ising 模型的相变, q 过程的鞅方法. 北京: 北京师范大学博士论文, 1993.



索　引

符号